Занятие по арифметике №1. Группа Стали.

Дроби по модулю. Лемма об уточнении. Подсчет показателей. Дирихле и арифметика.

1. Докажите, что

а) при простом $p > 2$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$;

б) (теорема Вольстенхольма, 1862) при простом $p > 3$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

2. Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7$$

делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

3. Пусть p и q – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число p делится на 1979.

В следующей задаче p будет обозначать простое число, а запись $p^k \parallel M$ – то, что p входит в разложение M на простые множители в k-й степени, то есть M делится на p^k и не делится на p^{k+1}.

4. Докажите, что

а) если $a \equiv b \pmod{p}$, то $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$;

б) если $a \equiv b \pmod{p}$, то $a^{p^k} \equiv b^{p^k} \pmod{p^{k+1}}$;

в) если $a \equiv b \pmod{p^l}$ и $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $a^{p^k} \equiv b^{p^k} \pmod{p^{l+k}}$;

г) (Лемма об уточнении, полный вариант) Если a не делится на p, $p^k \parallel a - b$, $m = p^l s$, s не кратно p и при этом либо $p > 2$, либо $p = 2$ и $k > 1$, то $p^{k+l} \parallel a^m - b^m$.

5. а) При каких натуральных m число $31^m - 1$ делится на 2^m? б) Докажите, что для любого нечетного a и натурального m существует бесконечно много натуральных k таких, что $a^k - 1$ делится на 2^m. в) Докажите, что для любого нечетного a существует лишь конечное число натуральных m таких, что $a^m - 1$ делится на 2^m.

6. а) Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

б) Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число

$$1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}.$$

7. Целые числа a, b, и c таковы, что числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ – тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

8. Найти все пары (p, q) простых чисел такие, что число $2^p - 1$ делится на q, и среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

9. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.

10. Пусть p, q – простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q | 2^p + 3^p$, то $q > p$.

11. (Теорема об одновременном приближении). Пусть α_1, α_2, $\ldots$, α_n – вещественные числа, N натурально. Докажите, что существуют такие целые p_1, p_2, $\ldots$, p_n и натуральное $q \leqslant N^n$, что

$$|q\alpha_1 - p_1| \leqslant \frac{1}{N}, |q\alpha_2 - p_2| \leqslant \frac{1}{N}, \ldots, |q\alpha_n - p_n| \leqslant \frac{1}{N}.$$

12. На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается "перекатывать" по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки M на расстоянии меньше ε.

13. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.

14. (Лемма Туэ). Пусть $n > 1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x \leqslant \sqrt{n}$,, $y \leqslant \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.

а) Дайте прямое доказательство этого утверждения с помощью принципа Дирихле.

б) Выведите это утверждение из теоремы Дирихле о рациональном приближении.

15. Пользуясь леммой Туэ и тем, что -1 – квадратичный вычет по модулю простого числа p вида $4k+1$, докажите, что p является суммой двух квадратов.