Случайные графы

А.М. Райгородский

Основные понятия. Рассмотрим множество $V = \{1, \ldots, n\}$. Будем интерпретировать его как множество вершин некоторого графа. Пусть $e_1, \ldots, e_{C_n^2}$ - ребра полного графа на V. Выберем случайное подмножество E из множества $\{e_1, \ldots, e_{C_n^2}\}$ с помощью "схемы испытаний Бернулли", т.е. каждое ребро независимо от остальных положим в E с вероятностью $p \in [0, 1]$; соответственно, с вероятностью $q = 1 - p$ мы его туда не кладем. В результате возникнет *случайный граф* $G = (V, E)$: множество его вершин фиксировано, а множество ребер E случайно. Понятно, что вероятность появления конкретного графа $G = (V, E)$ есть величина $P(G) = p^{|E|} q^{C_n^2 - |E|}$.

Каждый граф - это *элементарное событие.* Совокупность же графов B естественно называть *событием*: всякое событие строится из элементарных, как из кирпичиков. Событие разумно, в свою очередь, интерпретировать как свойство случайного графа: сказать, что для графа выполнено некоторое свойство, это все равно, что отнести граф к событию, состоящему из "кирпичиков", указанным свойством обладающих. Ясно, что вероятность события есть сумма вероятностей элементарных событий, из которых оно состоит: $P(B) = \sum\limits_{G \in B} P(G)$. В частности, если Ω - это множество всех возможных графов на n вершинах, то $P(B) = \sum\limits_{k=0}^{C_n^2} C_{C_n^2}^k p^k q^{C_n^2 - k} = 1$: какой-то граф непременно возникнет.

Имея данное определение случайного графа, можно судить о том, с какой степенью достоверности граф обладает тем или иным свойством. Например, можно оценить вероятность связности графа или вероятность того, что граф имеет какое-то хроматическое число, и т.д. Полезно бывает изучать различные вероятности при $n \to \infty$. Скажем, если $P(B) \to 1$, коль скоро $n \to \infty$, то свойство B исключительно достоверно. Говорят даже, что в таком случае оно выполнено *почти наверное.* Важно заметить, что вероятность ребра случайного графа - величина p - сама имеет право зависеть от n, и в этом есть глубокий смысл, который мы ниже пронаблюдаем.

Любая функция X, определенная на множестве графов, будет называться *случайной величиной.* Пусть X принимает k различных значений $y_1, \ldots, y_k$. Тогда *математическим ожиданием* величины X называется ее "взвешенное среднее" $MX = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(\{G : X(G) = y_i\})$. Для краткости мы будем писать $P(X = y_i)$, подразумевая последнюю вероятность.

Задачи.

0. **а)** Докажите *линейность* математического ожидания: $M(c_1 X_1 + \ldots + c_s X_s) = c_1 MX_1 + \ldots + c_s MX_s$ для любых случайных величин $X_1, \ldots, X_s$ и констант $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$. **б)** Докажите, что если X принимает неотрицательные целые значения, то $P(X = 0) \geq 1 - MX$.

1. Найдите MX для случайной величины X, равной **а)** числу треугольников в G; **б)** числу циклов длины k в G; **в)** числу полных подграфов на k вершинах (k - *клик*) в G; **г)** числу различных k - вершинных деревьев в G; **д)** числу изолированных k - вершинных деревьев в G; **е)** числу вершин на древесных компонентах G; **ж)** числу вершин на циклических компонентах G.

2. Докажите, что если $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет треугольников.

3. Пусть $k \geq 2$ - константа. Докажите, что если $p = o\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет древесных компонент на k вершинах.

4. Докажите, что если $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное образует лес.

5. Докажите, что если $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное двудолен.

6. Определим *число независимости* $\alpha(G)$ графа G как размер максимального подмножества вершин в G, которые попарно не соединены ребрами. Пусть $p = \frac{1}{2}$. Докажите, что $P(\alpha(G) < 2\log_2 n + 10\log_2\log_2 n) \to 1$ при $n \to \infty$.

7. В условиях задачи 5 докажите, что хроматическое число случайного графа почти наверное больше, чем $\frac{n}{\log_2 n} + o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$.

8. Докажите, что если $p > \frac{3\ln n}{n}$, то почти наверное случайный граф связен.

9*. Пусть $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha > \frac{5}{6}$. Докажите, что

$$P\left(\forall\, S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} : \chi(G|_S) \leq 3\right) \to 1, \;\; n \to \infty.$$

Здесь $G|_S$ - *порожденный* или *индуцированный* подграф графа $G = (V, E)$, т.е. граф $H = (S, F)$, у которго $e = (x, y) \in F$ тогда и только тогда, когда $x, y \in S$ и $e \in E$.

10*. Докажите, что если $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное может быть реализован как граф расстояний на плоскости, а если $p > \frac{1000}{n}$, то почти наверное выполнено обратное свойство.