Занятие по арифметике №2. Группа Стали.

Квадратичные вычеты. Делители форм.
Один вид рекуррентных последовательностей.
Уравнения с показателями.

1. Найдите наименьшее значение $n \in \mathbb{N}$, для которого число n^2-n+11 разлагается в произведение четырех простых чисел (не обязательно различных).

2. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона") Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m, и установите, какой знак соответствует каждому m.

3. а) (Эйлер) Докажите ,что уравнение

$$4xy - x - y = z^2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что оно имеет бесконечно много решений в целых отрицательных числах x, y, z.

4. Докажите, что уравнение $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y.

5. Докажите, что уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ относительно натуральных чисел x и y

а) не имеет решений при $n = 1$,

б) имеет бесконечно много решений при $n = 2$,

в) не имеет решений при $n \geqslant 3$.

6. Докажите, что если числа $m, n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют равенству $2m^2 + m = 3n^2 + n$, то числа $m - n$, $2m + 2n + 1$, $3m + 3n + 1$ являются квадратами целых чисел.

7. Решите в целых неотрицательных числах уравнение

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z.$$

8. Решите уравнение в натуральных числах: $105^x + 211^y = 106^z$.

9. Решите уравнение $2^x + 3^y = 5^z$ в натуральных числах.