Занятие по арифметике №3. Группа Стали.

Китайская теорема об остатках. Целые и дробные части.
Арифметические функции. Repetitio est mater studiorum.

1. а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?

б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых – не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?

2. Докажите, что $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$.

3. (Битти, Банг) а) Докажите, что если последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbf{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд, то α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

б) Докажите, что если α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbf{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд.

4. Докажите, что совершенное число (т.е. число, равное сумме всех своих натуральных делителей, за исключением его самого) не может быть точным квадратом.

5. а) Докажите, что количество делителей вида $4k+1$ у любого натурального числа не меньше количества делителей вида $4k+3$.

б) Для каких натуральных чисел имеет место равенство?

6. Докажите, что уравнение $x^2 + 5 = y^3$ в целых числах не имеет решений.

7. Докажите, что если p – простое число, большее трех, и $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$, то $2^n - 2$ делится на n.

8. (Эйзенштейн, 1850) Докажите, что при простом $p > 2$

а) $\frac{2^p-2}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{p-1} \pmod{p}$;

б) $\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p-2} \pmod{p}$.

9. Найдите все решения уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$$

в рациональных числах x, y, z.