Занятие по многочленам №1. Группа Стали.

Формальное и функциональное равенство. Разностный многочлен. Остатки. Значения многочленов с целыми коэффициентами. Многочлены от нескольких переменных.

1. Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a

$$p(x) = p(a - x).$$

Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$. Например, если $p(x) = x^5 + (1-x)^5$, то, очевидно, $p(x) = p(1-x)$ и, как нетрудно проверить,

$$p(x) = 5y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{16},$$

где $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

2. Докажите, что

а) любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ является разностным многочленом некоторого многочлена Q, и

б) этот многочлен Q определен с точностью до прибавления произвольной константы.

3. Если многочлен $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом a_n принимает целые значения при всех целых x, то $n!a_n$ — целое число.

4. Пусть $P(x)$ - многочлен, дающий при делении на $x-a$ остаток A, при делении на $x-b$ остаток B, при делении на $x-c$ остаток C. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$. (Числа a, b, c попарно различны).

5. Докажите, что если $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ - многочлены такие, что

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x),$$

то $P(x)$ делится на $x - 1$.

6. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$, для которых выполнялись бы равенства $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3, \ldots, P(x_{n-1}) = x_n$, $P(x_n) = x_1$.

7. Пусть $P(x, y)$ – многочлен двух переменных (конечная сумма произведений вида $ax^m y^n$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$). Известно, что

а) для любых x, y и z имеем $P(x + z, y + z) = P(x, y)$;

б) для любых x и y имеем $P(x + 1, y + 1) = P(x, y)$.

Докажите, что существует такой многочлен одной переменной $Q(z)$, что для любых x и y выполняется равенство $P(x, y) = Q(x - y)$.

8. Найдите все k, для которых многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - kxyz$ делится на $x + y + z$.