Занятие по многочленам №2. Группа Стали.

Польза разностного многочлена.
Многочлен по модулю.
Еще многочлены от нескольких переменных. Varia.

1. О многочлене $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ известно, что: 1) $P(1) = 1$; 2) $P(0,9) = 0$; 3) $-0,1 \leqslant P(x) \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 0,9$. Докажите, что: а) $n > 2$; б) $n > 3$.

2. Докажите, что для каждого натурального n существует многочлен P степени не выше n с целыми коэффициентами, такой, что $P(x)$ делится на 2^n для каждого целого четного x, и имеет остаток 1 при делении на 2^n для каждого целого нечетного x.

3. Пусть $\{F_n\}$ – последовательность чисел (**Фибоначчи**), определяемая равенствами $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени 990 удовлетворяет условиям $P(k) = F_k$ при $k = 992, \ldots, 1982$, то $P(1983) = F_{1983} - 1$.

4. Про многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами известно, что при любом целом x число $R(S(x)) - x$ делится на данное целое k. Докажите, что число $S(R(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.

5. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что уравнение

$$P(x^4)P(x^3)P(x^2)P(x) = 2000$$

не имеет целых корней.

6. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(-1) = P(1)$. Докажите, что существуют такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с целыми коэффициентами, что при всех целых x выполняется равенство: $P(x) = A(x^2 - 1) + x(x^2 - 1)B(x^2 - 1)$.

7. Докажите, что если x, y и z – различные целые числа, а n – неотрицательное целое число, то

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

– целое число.

8. Докажите, что мноочлен $4x^{1000} + 3$ нельзя представить в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами.

9. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что при некотором a все коэффициенты многочлена $P(x + a)$ имеют один и тот же знак.

10. Пусть $P(x, y)$ обозначает многочлен с действительными коэффициентами от двух переменных и $P(x, y) = 0$ для любых действительных x и y таких, что $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что существует такой многочлен $Q(x, y)$, что $P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)Q(x, y)$.

11. На координатной плоскости дан квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Этот квадрат поделен на 64 равных квадрата прямыми, параллельными осям координат. Докажите, что среди этих 64 квадратов найдется квадрат, внутри которого нет ни одной точки с координатами $x = at^3 + bt^2 + ct + d$, $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, каково бы ни было значение параметра $t \in$ (коэффициенты многочленов a, b, c, d, A, B, C, D – фиксированные действительные числа).

12. Для бесконечного множества значений многочлена, существует более одной целой точки, в которой принимаются эти значения. Докажите, что существует не более одного целого значения многочлена, принимаемого ровно в одной целой точке.