Конструктив.13.04.06.Жесть

1)Дан правильный треугольник ABC со стороной 3. Треугольник называется "большим", если все его стороны больше 1.

а)Доказать, что из треугольника ABC можно вырезать 100 больших треугольников.

б)Треугольник ABC можно целиком разрезать на не менее чем 100 больших треугольников.

2) Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность x_n , что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k||m - k| >= 1$$

3) На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

4) Множество A состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший равен 100. Каждый элемент A, кроме 1, равен сумме двух (возможно равных) чисел, принадлежащих A. Укажите среди всех множеств A, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

5) В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были окрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

6) На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m.

7) Можно ли разместить 2006 точек в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой прямоугольник площади 0.005 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри хотя бы 1 из этих точек?

Инварианты.13.04.06.Жесть

8) В клетки таблицы $m \times n$ вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, неотрицательны.

9) На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стертых. Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одно число, то оно не зависит от порядка, в котором производились стирания.

10) Дан произвольный набор из чисел. Из него получается новый набор из циклических полусумм чисел старого набора. Из этого набора - следующий по тому же правилу и т.д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то первоначальные числа равны.

11) Возьмем любое 2006-значное число, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим за a, сумму цифр числа a через b, сумму цифр b - через c. Чему равно c?

12) По кругу выписаны несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

13) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку "особой", если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

14) В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две платы так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

15) На прямой по порядку расположены точки $A_1, A_2, ..., A_n$ так, что длины отрезков $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_2, ..., A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_1A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать: а) для k=3;

б) для каждого натурального $k < n-1$.