Некоторые важные неравенства.

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$, при $x > -1$.

Неравенство Йенсена: если функция $f : (a,b) \to R$ выпукла вниз, $t_1, \ldots, t_n \in (a,b), \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, то

$$f(\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n \leq \alpha_1 f(t_1) + \ldots + \alpha_n f(t_n).$$

Неравенство Коши: при $x_1, \ldots, x_n > 0$ $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) \leq \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}.$$

Неравенство Минковского:

$$\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1+y_1)^2 + \ldots + (x_n+y_n)^2}.$$

Неравенство Чебышева: если $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, то

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

Неравенство Юнга: для любых положительных x, y, a, b, где $1/a + 1/b = 1$ имеет место неравенство

$$\frac{x^a}{a} + \frac{x^b}{b} \geq xy.$$

Указание. Пусть $a = m/n$, тогда $b = m/(m-n)$, примените неравенство Коши к набору из n чисел $x^{\frac{m}{n}}$ и $(m-n)$ чисел $y^{\frac{m}{m-n}}$.

Неравенство Гёльдера: при $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x_i, y_i \geq 0$

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leq (x_1^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Указание. Не нарушая общности, можно считать, что $x_1^p + \ldots + x_n^p = 1$ и $y_1^q + \ldots + y_n^q = 1$. Теперь примените неравенство Юнга к x_1, y_1 и т.д.

Задачи.

0. Сравните числа а) 31^{11} и 17^{14}.

б) $1234567 \cdot 1234569$ и 12345678^2.

в)
$$\frac{1}{5001} + \frac{1}{5002} + \ldots + \frac{1}{5100}$$
и $\frac{1}{49}$.

1. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

2*. Докажите, что при любых $a, b > 0$, для которых $a + b = 1$, верно неравенство $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq 25/2$.

3. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

4. Для положительных a, b, c докажите, что
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1.$$

5. a, b, c, d – положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

6. Докажите, что для положительных a, b, c: $a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$.

7. Докажите для $a, b > 0$ неравенство
$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} = 5\sqrt[5]{ab}.$$

8. Докажите, что для любых положительных a и b
$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + nb}{n+1}.$$

9. Докажите, что для любого t справедливо неравенство
$$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0.$$

10. Для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ докажите неравенство
$$\frac{\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n}{n} \leq \sin\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

11. Докажите, что если a и b отличны от нуля, то

$$(a+b)^{50} \leq 2^{50}(a^{50}+b^{50}).$$

12. Докажите, что при любом значении x выполнено неравенство

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

13*. Докажите, что для любого натурального $n>1$ выполнено

$$2<(1+1/n)^n<3.$$

14*. Докажите, что при $n>2$ $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$.

15*. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

16*. Если сумма положительных a, b, c равна 1, то $1/a+1/b+1/c \geq 9$.

Производящие функции.

Производящей функцией последовательности $a_0, a_1, a_2 \ldots$ называется выражение

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$$

Производящие функции легко складывать:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+...)+(b_0+b_1x+b_2x^2+...) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...,$$

а при умножении нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

0. Если

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...,$$

то $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$.

1. $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = 1$.

2. $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots$.

3. Пусть $a(x) = a_0+a_1x+\ldots$ – производящая функция и $a_0 \neq 0$. Докажите, что существует единственная производящая функция $b(x)$ такая, что $a(x) \cdot b(x) = 1$. Обозначение: $b(x) = \frac{1}{a(x)}$.

4. Вычислите $\frac{1}{1-ax}$ и $\frac{1}{a-x}$.

5. Вычислите $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, используя тот факт, что

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = (1 + x + x^2 + \ldots) - (x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots).$$

6. Докажите, что

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

7. Вычислите $\frac{1}{(1-x)^3}$.

8. а) Найдите производящую функцию для последовательности $C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3 \ldots$

б) Докажите тождество

$$C_n^0C_k^m + C_n^1C_k^{m-1} + \ldots + C_n^mC_k^0 = C_{n+k}^m.$$

9. а) Докажите, что $\frac{1}{(1-x)^n}$ – производящая функция для количества (упорядоченных) разбиений числа m в сумму n слагаемых.

б) Вычислите $\frac{1}{(1-x)^n}$.

Для любого числа α определим

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

10*. Докажите, что для любых α и β

$$(1+x)^\alpha(1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}.$$

11*. Докажите, что любую производящую функцию можно единственным образом представить в виде произведения

$$(1+x)^{a_1}(1+x^2)^{a_2}(1+x^3)^{a_3}\dots$$

для некоторых $a_1, a_2, \dots$

12. Задача о размене монет. а) Докажите, что любое количество рублей, большее 8, можно разменять монетами по 3 и по 5 рублей.

б) Найдите производящую функцию для числа способов размена по 3 и по 5 рублей.

в) У кассира есть банкноты по 10, 50 и 100 рублей в неограниченном количестве. Найдите производящую функцию для числа способов выдать сдачу в n рублей.

г)* Пусть p и q взаимно просты. $a_n = 1$, если n рублей можно разменять монетами по p рублей и q рублей, и $a_n = 0$ в противном случае. Найдите производящую функцию для последовательности $a_0, a_1, \dots$

13*. У кассира есть монеты по p и q рублей в неограниченном количестве, p и q взаимно просты.

а) Докажите, что если n достаточно велико, то кассир сможет разменять n рублей.

б) Кассир сможет разменять k рублей тогда и только тогда, когда он не сможет разменять $(p-1)(q-1)-k$ рублей.

в) Найдите количество сумм, которые кассир не сможет разменять.

Числа Фибоначчи определяются формулой

$$F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1.$$

14. Пусть $F(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \dots$ Вычислите $(1-x-x^2)F(x)$.

15. а) Докажите, что $F(x) = \frac{a}{1-\phi_1 x} + \frac{b}{1-\phi_2 x}$, где ϕ_1 и ϕ_2 – корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите числа a и b.

б) Найдите явное выражение для F_n.

Число Каталана c_n определяется как число способов правильно расставить n пар скобок.

16. Докажите, что

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0.$$

17. Пусть $c(x)$ – производящая функция для чисел Каталана. Докажите, что $xc^2(x) - c(x) + 1 = 0$.

18. Найдите $c(x)$ и явное выражение для c_n.