Линейность

Задача 1. В стаде коров каждая корова весит

(a) натуральное;

(b) рациональное;

(c) действительное число килограммов. Известно, что если из стада увести любую корову, остальных коров можно разбить на два стада равного размера и равной массы. Докажите, что все коровы весят поровну.

Задача 2. (a) По кругу написано несколько чисел. Известно, что каждое из них равно полусумме своих соседей. Докажите, что все числа равны.

(b) В каждой из клеток доски $m \times n$ написано число. При этом в крайних клетках написаны нули, а для каждой из внутренних клеток написанное в ней число равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все числа равны нулю.

(c) В каждой из крайних клеток доски $m \times n$ написано число. Докажите, что можно так расставить числа в остальных клетках таблицы, что для каждой из внутренних клеток написанное в ней число будет равно среднему арифметическому своих соседей.

(d) Сформулируйте и докажите обобщение предыдущего утверждения на случай произвольного связного графа.

Задача 3. Прямоугольник разрезан на прямоугольники так, что у каждого из них одна из сторон равна 1. Докажите, что у исходного прямоугольника одна из сторон целая.

Задача 4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AI_a и BI_b. Докажите, что для любой точки M на отрезке I_aI_b сумма расстояний до сторон AC и BC равна сумме расстоянию до прямой AB.

Задача 5. На каждой из сторон треугольника ABC выбрано по точке так, что медианы получившегося треугольника параллельны сторонам исходного. Найдите отношения, в которых выбранные точки делят стороны.