Элементы геометрии треугольника.

ГРУППА 1. Занятие 1. 6 апреля 2006

Задача 1. Охарактеризуйте все треугольники, у которых перпендикуляры к сторонам, восставленные в точках их пересечения с биссектрисами противоположных углов, пересекаются в одной точке.

Задача 2. На сторонах треугольника ABC построены прямоугольники ABB_1A_1, BCC_2B_2 и CAA_2C_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Задача 3. Длины сторон остроугольного треугольника умножили на косинусы противоположных углов. Докажите, что из трех получившихся отрезков можно сложить треугольник. Чему равен радиус его описанной окружности, если радиус описанной окружности исходного треугольника равен R ?

Задача 4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

Задача 5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и CDA равна сумме радиусов вписанных окружностей треугольников BCD, DAB.

Задача 6. Дан вписанный четырехугольних с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон делит противоположную сторону пополам.

Задача 7. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что восемь точек: середины сторон и проекции середин сторон на противоположные стороны лежат на одной окружности.

Задача 8. Через точку M внутри данного треугольника провели три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника.

a) Докажите, что M лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

b) Укажите способ построения такой точки M для данного треугольника.

c) Пусть x – радиус данных окружностей. Докажите, что $\frac{2r}{3} \leq x \leq \frac{R}{3}$, где r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Верно ли, что если одно из неравенств обращается в равенство. то треугольник правильный ?

Задача 9. Дан треугольник ABC. Точки A_0, B_0, C_0 – середины его сторон. Вписанная окружность касается стороны BC в точке A_1, точка A_2 симметрична A_1 относительно биссектрисы угла A. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые A_0A_2, B_0B_2 и C_0C_2 пересекаются в одной точке.

Задача 10. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.