Группа жести, геометрия , составитель В. Астахов

0. Через точку H проведены три окружности одинакового радиуса. Они пересекаются в точках A, B, C. Докажите, что H ортоцентр треугольника ABC.

1. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD, AD и BC пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $AB \perp PQ$.

2. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D - точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая P с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна AB.

3. Даны диаметр AB окружности и точка C, не лежащая на прямой AB. С помощью одной линейки (без циркуля) опустите перпендикуляр из точки C на AB, если:
а) точка C не лежит на окружности;
б) точка C лежит на окружности.

4. Пусть O_a, O_b и O_c - центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB. Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB, то точка O_c лежит на прямой PC.

5. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A, и из неё проведены касательные AP и AQ; M - середина отрезка PQ.
а) Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.
б) Докажите, что $PM^2 = LM \cdot KM$.

6. В треугольнике ABC I - центр вписанной окружности, A_1 точка касания её со стороной BC. A_2 - точка касания вневписанной окружности со стороной BC. Тогда A, A_2 и точка, диаметрально противоположная точке A_1 относительно вписанной окружности, лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC I - центр вписанной окружности, M - центр масс, A_1, B_1 и C_1 точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке N, причём M делит отрезок IN в отношении $1 : 2$.

8. В треугольнике ABC точки O и I -центры описанной и вписанной окружностей соответственно, а A_1, B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности со сторонами.A_2, B_2, C_2 - середины дуг $\breve{BC}, \breve{AC}, \breve{AB}$ описанной окружности
а)Докажите, что $A_1B_1C_1$ гомотетичен $A_2B_2C_2$
б)Докажите, что IO - прямая Эйлера для треугольника $A_1B_1C_1$

9. Точки O, I -центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. В углы этого треугольника вписаны окружности равных радиусов. Окружность ω касается их всех внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой OI.

10. Композиция двух гомотетий с центрами A_1, A_2 и коэффициентами k_1, k_2 ($k_1 \cdot k_2 \neq 1$) является гомотетией с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$ и центром на прямой A_1A_2.

11. Общие внешние касательные к окружностям ω_1, ω_2, пересекаются в точке A_3, к окружностям ω_1, ω_3 - в A_2, к окружностям ω_2, ω_3 - в A_1. Докажите, что точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой.

12. Окружность ω_1 расположена внутри окружности ω_2. Рассматриваются все окружности ω, касающиеся этих двух внутренним образом в точках A, B. Докажите, что все такие прямые AB имеют общую точку.

13. На плоскости расположены треугольник ABC и окружность ω. Также даны окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, вписанные в соответственные углы этого треугольника и касающиеся ω в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.