Рулетки Гейла

Игра происходит так. У крупье есть несколько рулеток, на каждой написано несколько чисел (все числа разные). Игрок выбирает одну из рулеток, после этого крупье выбирает одну из оставшихся. Обе рулетки запускают, и выигрывает тот, у кого выпавшее число больше.

Естественно, чем меньше рулеток и чем меньше чисел на каждой, тем легче их изготовить.

0. Приведите пример рулеток, на которых крупье выигрывает чаще, чем в половине случаев.

1. Какой наибольший выигрыш может гарантировать себе крупье на трех рулетках с тремя числами каждая?

2. Можно считать, что все рулетки расположены по циклу: первая выигрывает у второй, вторая — у третьей, ..., последняя — у первой.

3. а) Докажите, что крупье не может выигрывать в $\frac{3}{4}$ случаев.

б) Покажите, что при достаточно большом количестве рулеток и чисел на них можно приблизить выигрыш к $\frac{3}{4}$ сколь угодно точно.

Возникает вопрос: что будет, если количество чисел и/или число рулеток ограничить?

4. Пусть рулеток сколько угодно, а чисел на каждой не больше n.

а) Докажите, что крупье не может выиграть больше, чем в $f(2k) = f(2k-1) = 1 - \dfrac{k}{2(2k-1)}$ доле случаев.

б) Приведите пример, когда это достигается..

Задача. А чего можно добиться, если ограничить *только* количество рулеток числом n?

Удобная форма записи

Запишем в i-ю строчку числа на i-й рулетке в порядке возрастания. Считаем, что i-я рулетка выигрывает у $(i+1)$-й, а таблица "замкнута в кольцо": после последней строчки идет первая.

Теперь нарисуем граф: из клетки идет стрелка в самую правую (то есть максимальну) клетку строчкой ниже, число в которой меньше. Тогда по этому графу легко восстанавливается выигрыш строчки.

5. а) Тривиальные свойства этого графа. Он "монотонен": если из A в B идет ребро, то из клетки, следующей за A в строке — не левее, чем в B. Более того, если мы пошли по стрелкам и вернулись в исходную строку, то мы сдвинулись влево.

б) По любому графу с этими свойствами мы можем построить рулетки, которые "дают" выигрыш не хуже, чем этот граф.

в) Из любого графа можно получить не худший со следующим условием. Если есть ребро AB, то при замене его на AC (C — следующая за B) нарушится условие пункта а).

Теперь мы ограничиваемся лишь графами из пункта в) предыдущей задачи (назовем их *связками*). Назовем *нитью* путь по стрелкам из клетки с наибольшим числом.

6. По нити однозначно восстанавливается связка. При этом первый "виток" нити идет по левой границе таблицы.

Теперь, если мы не ограничиваем количество чисел на рулетке, то можно считать рулетки отрезками $[0,1]$, а нитью – цепочку отметок на отрезках: первая отметка (на первом отрезке) в правом конце, $(i+1)$-я отметка (на $(i+1)$-м отрезке) показывает на верхнюю границу тех, кого мажорируют стоящие до i-й отметки; последняя отметка в нуле. Для симметрии добавим на каждый из остальных отрезков по отметке в нуле (см. следующую задачу).

7. а) Если изменить порядок чисел на обратный, то получатся рулетки с тем же выигрышем.

б) Что при этой операции происходит с нитью?

8. Найдите максимальный выигрыш на трех рулетках с шестью числами каждая.

9. а) Пусть у нити есть виток, приходящий в ту же точку (на том же отрезке), из которой вышел. Тогда этот виток можно убрать.

б) Пусть на некотором отрезке есть две отметки не в концах. Тогда количество отметок можно уменьшить.

в) Можно даже добиться, чтобы на одном из отрезков не было внутренних отмеченных точек.

10. а) Докажите, что оптимальная конфигурация выглядит так. Первые n отметок в единице. Остальные отметки, если их нумеровать с конца, выглядят так: $x_0 = 0$, $x_{k+1} = \dfrac{a}{1-x_k}$, $x_n = 1$ (это – последняя из единичных отметок) и $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. При этом число a как раз и будет минимальным гарантированным выигрышем проигрывающего.

б) Найдите a. **Ответ.** $\dfrac{1}{4\cos^2(\pi/(n+2))}$