Лемма Холла

Каринэ Куюмжиян

Менделеево 2 апреля 2007 группа Орла

1. 20 школьников решали 20 задач. Каждый решил ровно две задачи, и каждую задачу решили ровно два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач так, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач и все задачи будут рассказаны.

2. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

   Лемма Холла ("лемма о девушках"). Есть n юношей и несколько девушек, среди которых некоторые знакомы. Известно, что каких бы k юношей ($1 \leq k \leq n$) ни выбрать, общее число знакомых им девушек не меньше k. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

3. В каждой строчке и в каждом столбце таблицы 8×8 стоит ровно 3 фишки. Докажите, что из них можно выбрать восемь — по одной в каждой строке и столбце.

4. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Докажите, что тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

5. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу (во внутренней точке).

6. В условиях леммы Холла назовем множество из k юношей критическим, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k.

   А) Докажите, что объединение и пересечение двух критических множеств — критическое множество.

   Б) Докажите, что если удалить критическое множество юношей вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будут выполнены условия леммы Холла.

   В) Докажите лемму Холла.

7. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

8. В компании из n юношей и n девушек каждые k юношей знакомы в совокупности не менее, чем с k девушками. Докажите, что каждые k девушек знакомы в совокупности не менее, чем с k юношами.

9. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.

10. Дефицитом для набора из k юношей, знакомых в совокупности с p девушками, назовем число $max(0, k - p)$. Докажите, что если для n юношей максимальный (по всем поднаборам) дефицит равен d, то $n - d$ юношей могут выбрать себе невесту.

11. Прямоугольник $m \times n$ ($m \leq n$) называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.

12. а) Пусть X — набор всех k-элементных подмножеств $2k+1$-элементного множества. Докажите, что существует перестановка τ набора X такая, что $y \cap \tau(y) = \emptyset$ при любом y из X.

    б)Дан n-мерный куб. A и B – две его противоположные вершины. Каким наименьшим числом путей из A в B можно покрыть все ребра куба?

13. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, чтобы из каждой вершины выходили ребра обоих цветов.

14. Есть n мальчиков и $2n - 1$ конфет. Докажите, что каждому мальчику можно раздать по конфете так, что если мальчику не нравится его конфета, то ему не нравятся и конфеты других мальчиков (чтобы не создавались предпосылки для драки).