

# Всерос-11

15.04.09

1. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?
2. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.
3. Окружность, вписанная в четырехугольник  $ABCD$ , касается его сторон  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно. Пусть  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  — соответственно окружности, вписанные в треугольники  $AKL$ ,  $BLM$ ,  $CMN$ ,  $DNK$ . К окружностям  $S_1$  и  $S_2$ ,  $S_2$  и  $S_3$ ,  $S_3$  и  $S_4$ ,  $S_4$  и  $S_1$  проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, — ромб.
4. В квадрате  $n \times n$  клеток бесконечной шахматной доски расположены  $n^2$  фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее, чем через  $\lceil \frac{n^2}{3} \rceil$  ходов.