Теория графов

ТГ.1. а) Пусть ребра полного графа на шести вершинах покрашены в два цвета. Докажите, что тогда существует подграф на трёх вершинах ребра которого покрашены в один цвет.

б) Пусть на плоскости даны шесть точек расстояние между которыми различны. Докажите, что тогда существует отрезок с концами в этих точках, такой, что для какого-то треугольника с вершинами в этих точках он будет наименьшей стороной, а для какого=то наибольшей.

ТГ.2. Одна тоталитарная иностранная страна уничтожила все дороги ведущие из страны. После этого из города Наши стало выходить только три дороги, а из города Идущие только семь. Из остальных же городов выходит ровно десять дорог. Докажите, что Василий из города Наши сможет таки добраться до своего двоюродного братишки Алёшки, который живёт в городе Идущие.

ТГ.3. В дугой иностранной тоталитарной стране правители тоже перекрыли все дороги ведущие из страны, после чего на оставшихся дорогах ввели одностороннее движение. Выяснилось, что для любых двух городов существует маршрут, по которому можно добраться из одного города в другой (не обязательно обратный маршрут существует). Докажите, что тогда существует город, из которого можно добраться до всех городов или наоборот, из любого города до него можно добраться.

ТГ.4. Для любых двух городов тоталитарной страны (с уничтоженными дорогами ведущими из неё) существует ровно два города с которыми они оба соединены дорогами. Может ли в этой стране быть 2005 дорог?

ТГ.5. Пусть несколько лампочек соединены проводками. На каждой лампочке есть переключатель, который переключает саму лампочку и те с которой эта лампочка соединена проводками. Пусть все лампочки потушены. Докажите, что тогда можно зажечь все лампочки.