Комбинаторная геометрия. Теорема Хелли.

КГ.1. Пусть каждые два отрезка, принадлежащие некоторой системе отрезков, расположенных на одной прямой имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все отрезки из этой системы имеют по крайней мере одну общую точку.

КГ.2. Пусть каждые два прямоугольника из некоторой системы прямоугольников с параллельными сторонами имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все прямоугольники системы имеют по крайней мере одну общую точку.

КГ.3.* Пусть на прямой дана система из $2n+1$ отрезков, такая что каждый отрезок пересекается хотя бы с n отрезками из этой системы. Докажите, что тогда найдётся отрезок пересекающий все отрезки из этой системы.

КГ.4. *(Теорема Хана-Банаха)* а) На плоскости даны два непересекающихся многоугольника. Докажите, что существует не пересекающая их прямая, такая что многоугольники лежат по разные стороны от неё.

б) Обобщите эту теорему на случай n-мерного пространства.

КГ.5. *(Теорема Хелли)* а) Пусть каждые три многоугольника из системы выпуклых многоугольников имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все многоугольники из этой системы имеют общую точку.

б) Обобщите эту теорему на случай n-мерного пространства.

КГ.6. а) Пусть некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую длины полуокружности, обладает тем свойством, что каждые три дуги этой системы имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все дуги этой системы имеют оп крайней мере одну общую точку.

б) Каков критерий на длины дуг, чтобы условие попарного пересечения дуг было достаточным, для существования общей точки для всей системы?

КГ.7. а) Докажите, что если каждые три точки некоторого точечного множества можно покрыть кругом радиуса R, то и все точки множества можно покрыть кругом этого радиуса.

б)* Докажите, что если каждые три прямые из некоторого множества прямых можно пересечь кругом радиуса r, то и все прямые из этого множества можно пересечь кругом радиуса r.

КГ.8. Пусть для каждых трёх картин, вывешенных в выставочном зале, найдётся такая точка, из которой можно одновременно видеть все три картины. Докажите, что тогда в зале найдётся точка, из которой можно одновременно видеть все выставленные картины.

КГ.9. Можно ли обобщить теорему Хелли на случай двух и более точек? Иначе говоря, существует ли такое n, что для любых n множеств системы можно указать 2 точки, такие что каждое содержит хотя бы одну из них, то такие две точки можно указать для всех множеств системы.