Изогональное сопряжение и прямая Симсона

Педальным (подерным) треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник вершинами которого являются проекции точки P на стороны ABC. Описанная окружность педального треугольника называется *педальной (подерной) окружностью* точки P относительно треугольника ABC.

ИС.1. Докажите, что педальный треугольник вырождается (проекции лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Прямые, получающиеся таким образом называются *прямыми Симсона* точки P.

ИС.2. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка B' на описанной окружности выбрана так, что PB' перпендикулярна AC. Докажите, что прямая BB' параллельна прямой Симсона точки P.

ИС.3. Докажите, что при вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону и скорость поворота в два раза меньше чем скорость изменения дуги PA.

ИС.4. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам (где H - ортоцентр треугольника ABC).

Окружностно-чевианным треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник вершины которого — это точки повторного пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью ABC.

ИС.5. Докажите, что педальный и окружностно-чевианный треугольники точки P относительно треугольника ABC подобны и одинаково ориентированы.

Пусть дан произвольный треугольник ABC. Для любой точки P, отличной от вершин треугольника, отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис соответствующих вершин треугольника. Оказывается, что эти три прямые всегда пересекаются в одной точке (или же параллельны, т.е. пересекаются в одной точке на проективной плоскости), назовём её P'.

ИС.6. Докажите это (рекомендуется воспользоваться задачей ИС.5).

Точку P' называют *изогонально сопряжённой* точке P относительно треугольника ABC, а преобразование переводящее каждую точку проективной плоскости в изогонально сопряжённую — *изогональным сопряжением.*

ИС.7. Отразим точку P относительно сторон треугольника. Докажите, что центр окружности проходящей через получившиеся три точки изогонально сопряжён P. (Это, безусловно, тоже будет доказательством корректности определения изогонального сопряжения).

Докажите несколько элементарных свойств изогонального сопряжения.

1. Если точка P не лежит на прямых, содержащих стороны треугольника, то точка P' определяется однозначно, и изогонально сопряжённой точкой к P' будет точка P. Такие две точки будем называть *изогонально сопряжёнными.*

2. (ИС.8.) Изогонально сопряжённой точкой к точке, лежащей на прямой, содержащей сторону треугольника, будет вершина треугольника, соответствующая этой стороне.

3. (ИС.9.) Какие точки изогональное сопряжение оставляет на месте?

4. (ИС.10.*) Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то изогонально сопряжённой точке P будет точка на бесконечно удалённой прямой, которая задаёт направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

ИС.11. Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.

ИС.12 а) Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.

б)*(Окружность Эйлера)* Докажите, середины сторон и точки падения высот треугольника лежат на одной окружности.

ИС.13.* Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке X. Докажите, что прямая AX симметрична медиане стороны BC относительно биссектрисы угла A.

ИС.14. *(Теорема Паскаля)* Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Обозначим точки пересечения прямых AE и BF за X, BD и CE за Y, AD и CF за Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.