Комбинаторная геометрия. Задачи на разные темы.

КГР.1. Правильный нечетноугольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что хотя бы один из получившихся треугольников остроугольный.

КГР.2. Разрежьте квадрат на остроугольные треугольники.

КГР.3. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса 1/7.

КГР.4. Существует ли правильны n-угольник, все вершины которых имеют целочисленные координат.

а) $n = 4$.

б) $n = 3$.

в) $n \geqslant 5$.

КГР.5. На плоскости даны несколько прямых, причём так, что через точку пересечения любых двух проходит ещё какая-та прямая. Докажите, что тогда все прямые пересекаются в одной точке.

КГР.6. Пусть некоторое конечное множество точек на плоскости обладает тем свойством, что ось симметрии каждой пары точек из этого множества одновременно является осью симметрии всего множества. Докажите, что тогда все точки множества принадлежат одной окружности.

КГР.7. а) Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько точек. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержалась ровно одна из данных точек.

б) Тоже самое, только вместо точек даны непересекающиеся круги (не обязательно одного и того же радиуса).

КГР.8. Существует ли ограниченные множества, равные своей собственной части?

КГР.9. В вершинах квадрата сидит по кузнечику. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через какого-то другого кузнечика так, что попадает в точку симметричную той в которой он находился до этого. Могут ли в какой-то момент кузнечики образовывать вершины большего квадрата.