Задачи на максимум и минимум

В. Ю. Протасов, Летняя школа «Олимпиады и математика», Дубна, 2005

1 Длины и периметры

Задача 1. Исследовать задачу Фаньяно для тупоугольного треугольника.

Задача 2. Исследовать задачу Фаньяно для четырёхугольника (в данный четырёхугольник вписать четырёхугольник наименьшего периметра).

Задача 3. Доказать, что периметр ортотреугольника равен $\frac{2S}{R}$, где S — площадь исходного треугольника, R — радиус его описанной окружности.

Задача 4. Деревни A и B расположены на плоскости. Их разделяют две параллельные реки. Где на каждой из рек поставить мост, чтобы путь из A в B был наименьшим? Берега рек параллельны, ширина рек не обязательно одна и та же, мосты перпендикулярны берегам, длины мостов входят в длину пути.

Задача 5. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что для любой точки M плоскости верно неравенство $MA + MB \geqslant MC$. Найти ГМТ точек M, для которых неравенство обращается в равенство.

Задача 6. На плоскости дана прямая a и точки A и B по одну сторону от неё. Найти точку M, для которой сумма расстояний до A, B и a наименьшая.

Задача 7. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4 км. Можно ли эти деревни связать системой дорог так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую, а суммарная длина дорог не превосходила бы 11 км?

2 Изопериметры

Задача 8. (а) От прямого угла верёвкой данной длины отгородить участок наибольшей площади.

(б) Тот же вопрос про угол 60°.

Задача 9. (а) Линией наименьшей возможной длины (не обязательно прямой) разделить равносторонний треугольник на две фигуры равной площади.

(б) Тот же вопрос про квадрат.

Задача 10. Дан шарнирный четырёхугольник (длины сторон фиксированы, а углы можно менять). В каком положении площадь четырёхугольника максимальна?

Задача 11. (а) Разведчик пытается выйти из леса. Он знает, что площадь леса 20 км^2, и что в этом лесу нет полян. Может ли он составить свой маршрут так, чтобы, пройдя не более 16 км, наверняка выйти из леса?

(б) Тот же вопрос, но теперь известно, что лес — выпуклая фигура площади 20 км^2. Какую наименьшую длину пути l должен пройти разведчик, чтобы наверняка выйти из леса?