Радикальная ось и инверсия.

Степенью точки X относительно окружности ω с центром O и радиуса R называется величина $R^2 - OP^2$.

1.0. Каков знак степени точки в зависимости от её положения на плоскости.

1.1. Прямая проходящая через X пересекает окружность ω в точках A и B. Докажите, что величина $XA \cdot XB$ не зависит от прямой и равна модулю степени точки X относительно ω.

1.2. Пусть на плоскости даны две неконцентрические окружности. Докажите, что множество точек, у которых степени относительно этих двух окружностей равны есть прямая.

а) В случае если окружности пересекаются.

б) В случае если окружности не пересекаются.

Такая прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.

1.3. а)*(Теорема о трёх лепестках)* Докажите, что общие хорды пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

б) Обобщите эту теорему на случай если окружности не пересекаются и дайте определение понятию *радикальный центр* трёх окружностей.

1.4. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум непересекающимся окружностям лежат на одной прямой.

1.5. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что прямая проходящая через точки пересечения окружностей, построенных на отрезках AA_1 и BB_1 как на диаметрах, проходит через ортоцентр ABC.

1.6. Пусть стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. А стороны BC и AD в точке Q.

а) Докажите, что ортоцентры треугольников BPC, APD, ABQ и CDQ лежат на одной прямой.

б) *(Прямая Гаусса)* Докажите, что середины AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

1.7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K и продолжения стороны AB в точке L. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке M и продолжения стороны AC в точке N. Докажите что прямые KL и MN пересекаются на внешней биссектрисе угла B.

1.8. *(Теорема Брианшона)* Докажите, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

1.9. Окружность касается сторон AB и AC и описанной окружности треугольника ABC в точка P, Q и R соответственно. Докажите, что середина PQ это центр вписанной окружности треугольника ABC.

Пучком окружностей называется множество окружностей имеющих общую радикальную ось (саму радикальная ось тоже будем считать "большой" окружностью принадлежащей пучку) или концентрические окружности.

1.10. Как выглядит пучок окружностей? Докажите, что существуют окружности перпендикулярные всем окружностям пучка. Опишите все такие окружности.

1.11. Пусть даны три соосные окружности (имеющие общую радикальную ось). Пусть точка X двигается по одной из них. Докажите, что отношение степеней точки X относительно двух других окружностей не меняется.