23 июля 2006

Задачи про голосование

1. (А.Разборов) На выборах каждый избиратель (если приходит на выборы) голосует за себя (если является кандидатом) и всех своих друзей, являющихся кандидатами, и против всех остальных кандидатов. Перед выборами социологическая служба предсказывает, сколько голосов наберет каждый из кандидатов. Докажите, что избиратели могут так явиться на выборы, что прогноз окажется неверным для любого кандидата.

2. (В.Дольников) Каждый избиратель вносит в свой избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n+1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдётся кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

3. На плоскости дан треугольник ABC. На n-ом ходу точку X_n можно заменить на точку X_{n+1}, если она ближе, чем X_n для большинства вершин треугольника. Докажите, что любую точку Y можно за конечное число ходов получить из любой начальной точки X_1.

Задачи 4–6 составляют доказательство так называемой теоремы Эрроу (Kenneth Arrow) о диктатуре. Рассматривается следующая модель. В выборах (голосование открытое) участвуют $n > 2$ кандидатов и $m > 2$ избирателей. Каждый избиратель упорядочивает всех кандидатов в соответствии со своими предпочтениями. Хочется предъявить процедуру обработки этого набора m n-элементных списков (в дальнейшем — протокол), дающую на выходе "коллективный" n-элементный список. Протокол должен обладать двумя вполне разумными свойствами:

Принцип единогласия. Если кандидат A стоит выше кандидата B во всех m поданных списках, то и в коллективном списке A стоит выше B.

Принцип независимости. Расположение любой пары кандидатов A, B относительно друг друга полностью определяется их взаимным расположением в m поданных списках и совершенно не зависит от того, где в списках расположены другие кандидаты.

Пример такого протокола привести нетрудно: один из избирателей назначается **диктатором**; протокол выдаёт на выход мнение этого избирателя, игнорируя всех остальных. Теорема Эрроу утверждает, что никаких других протоколов, обладающих двумя приведенными выше свойствами, не существует.

Определение. Пусть X – группа избирателей, поставивших кандидата A выше B, а все остальные избиратели поставили B выше A, и при этом в коллективном мнении A стоит выше B. Тогда группа X называется **решающей коалицией относительно упорядоченной пары кандидатов** (A, B). Далее, группа избирателей называется **решающей коалицией**, если она является решающей относительно хотя бы одной пары кандидатов.

Заметим, что множество всех избирателей является решающей коалицией для любой пары кандидатов, а пустое множество решающей коалицией не является. Рассмотрим минимальную (по числу участников) решающую коалицию M.

4. Докажите, что в коалицию M входит ровно один эксперт d.

5. Докажите, что эксперт d образует решающую коалицию для любой пары кандидатов.

6. Докажите, что эксперт d является диктатором.

Итак, теорема Эрроу доказана. Рассмотрим теперь другую модель голосования. Как и выше, m избирателей подают свои списки, упорядочивающие $n = 2^k$ кандидатов (мы предположим, что число кандидатов равно степени двойки, а число m нечётное). Протокол теперь выдаёт на выходе не итоговое коллективное упорядочивание всех кандидатов, а только победителя выборов. Происходит это в k этапов: на первом этапе мы сравниваем первого кандидата со вторым, третьего с четвёртым, пятого с шестым и так далее; на втором этапе сравниваем победителей первой и второй пары, третьей и четвёртой и т.д. (в паре кандидатов выигрывает тот, кто стоит выше соперника в большинстве избирательных бюллетеней); $(k-1)$-ый этап — полуфиналы, последний этап — финал.

Представим себе, что одна из избирателей является манипулятором. Она знает заранее, как упорядочат кандидатов все остальные избиратели, и хочет добиться того, чтобы победил в итоге кандидат, имеющий наименьший номер в её списке предпочтений. Оказывается, для этой цели ей иногда имеет смысл скрыть свой истинный список предпочтений и подать некоторое другое упорядочение кандидатов.

7. Приведите пример, иллюстрирующий вышеприведенное утверждение.

Возникает вопрос: какое же из $2^n = 2^{2^k}$ возможных упорядочений кандидатов выгоднее всего подать манипулятору? Ясно, что в принципе можно ответить на этот вопрос, рассмотрев все $2^n = 2^{2^k}$ возможных упорядочений кандидатов манипулятором и выбрав из всех этих вариантов оптимальный.

8. А нельзя ли ответить на этот вопрос существенно быстрее?