24 июля 2006
Неравенства

К некоторым задачам относятся следующие ключевые слова: выпуклость, неравенство Йенсена, неравенство Мюрхеда.

1. (В.С.Гринберг) Числа $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ вещественны и положительны. Рассмотрим таблицу из m строк и n столбцов, в которой элемент A_{ij}, стоящий на пересечении строки i и столбца j, равен $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$. Докажите, что в этой тавлице найдётся число, являющееся (нестрого) наименьшим в своём столбце и (нестрого) наибольшим в своей строке.
Подсказка 1. Пусть $\frac{a}{p} < \frac{b}{q}$. Докажите, что $\frac{a}{p} < \frac{a+b}{p+q} < \frac{b}{q}$.
Подсказка 2. Начните со случая $i = j = 2$.

2. (С.Злобин) Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$.

3. (С.Берлов, О.Подлипский) Приведенные квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся таке положительные числа a и b, что $a\,f(x) + b\,g(x) > 0$ при всех x.

4. Что больше: 31^{11} или 17^{14}?

5. Числа a, b, c больше 1. Докажите, что

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

6. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$. Докажите, что a, b и c положительны.

7. (Н.Агаханов) Пусть $0 < x < \pi/3$. Докажите, что $\sin 2x + \cos x > 1$.

8а. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 13 минут, выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон — за 6,6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они вдвоём могут всё съесть и выпить?

8б. Запасы нефти, угля и газа таковы, что электростанция может проработать 16 дней на нефти, 11 дней на угле и 5 дней на газе, а фабрика – 9, 7 и 3 дня соответственно. Какое наибольшее время смогут проработать оба предприятия на этих запасах топлива?

9а. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$ для любых положительных a, b и c.

9б. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 \geq a^2b^2c + b^2c^2a + c^2a^2b$ для любых положительных a, b и c.

10. Докажите неравенство Юнга: $\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geq xy$, где $1/a + 1/b = 1$ и x, y, a, b положительны.

11. Докажите, что для любых углов α, β, γ, заключённых между 0 и π, справедливо неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$