26 июля 2006

Задачи про графы

1. (О.Бородин) В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате не более одного врага. (Если B враг A, то A враг B).

2. В каждой из трёх школ учится по n человек. Любой ученик имеет в сумме $n+1$ друзей из двух других школ. Доказать, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы трое выбранных учеников были попарно знакомы друг с другом.

3. На вечере танцев собрались n юношей и n девушек. При любом $k \leq n$, для любых k юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из них, не меньше k. Докажите, что все юноши одновременно могут танцевать со знакомыми девушками.

4. (А.Анджанс) Король хочет построить $n-1$ дорогу между n городами так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния между парами городов равнялись соответственно $1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$. Возможно ли это, если

а) $n = 6$;

б) $n = 2006$?

5. Все грани выпуклого многогранника — треугольники. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины можно было попасть в любую другую, двигаясь как только по синим рёбрам, так и только по красным.

6. Каждое ребро полного графа с 2006 вершинами покрашено в один из 10 цветов. Докажите, что в графе найдётся одноцветный цикл нечётной длины.

7. (С.Берлов) На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем ушли те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 99$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

8. (С.Берлов) На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече?

9. (А.Пастор) В стране 2006 городов, соединённых дорогами в связный граф. Известно, что граф остаётся связным при удалении любого одного ребра. Министр транспорта и министр внутренних по очереди вводят на дорогах одностороннее движение (по одной дороге за ход, пока возможно). Министр, после хода которого из какого-либо города становится невозможно добраться до какого-либо другого, уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли один из министров добиться отставки другого (при правильной игре)?

10. (О.Подлипский) Каждое ребро полного графа на 2004 вершинах покрашено в один из четырёх цветов, причём все цвета использованы. Всегда ли можно выбрать несколько вершин графа так, чтобы среди соединяющих их рёбер были рёбра ровно трёх цветов?

11. (Д.Карпов, А.Смирнов) В стране 1001 город, причём любые два соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит и в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого её города, не выезжая за пределы республики.

12. (Ю.Лифшиц) Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которым и A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.