ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

ИВАН В. АРЖАНЦЕВ

по мотивам брошюры М.Й. Ядренко "Принцип Дiрiхле та його застосування"

Площадь фигуры

Будем называть плоскую фигуру *простой*, если ее можно разбить на конечное число треугольников. Для такой фигуры A ее площадь $S(A)$ определяется как сумма площадей соответствующих треугольников.

Напомним, что точка (x_0, y_0), принадлежащая фигуре A, называется *внутренней* точкой фигуры A, если найдется круг (возможно, достаточно малого радиуса) с центром (x_0, y_0), целиком лежащий в A.

Несложно проверить, что функция "площадь" на множестве простых фигур обладает следующими свойствами:

• если фигура A имеет внутренние точки, то $S(A) > 0$;

• если фигура A сложена из простых фигур A_1 и A_2, не имеющих общих внутренних точек, то $S(A) = S(A_1) + S(A_2)$;

• равный фигуры, т.е. фигуры, которые можно наложить одна на другую, имеют одинаковые площади;

• площадь квадрата со стороной единица равна единице.

Более общо, фигура B называется *квадрируемой*, если для любого $\epsilon > 0$ существуют простые фигуры A_1 и A_2 такие, что $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ и $S(A_2) - S(A_1) < \epsilon$. Для квадрируемых фигур также можно определить понятие площади и доказать, что площадь – это единственная функция на множестве квадрируемых фигур, обладающая перечисленными выше четырьмя свойствами.

Отметим, что не каждая плоская фигура квадрируема (см., например, задачу 2). Желающим более детально познакомиться с понятием площади и его обобщениями можно рекомендовать книгу [1].

Задача 1. Докажите, что фигура, ограниченная конечным числом отрезков и дуг окружностей, является квадрируемой.

Задача 2. Напомним, что фигура называется *ограниченной*, если она содержится в некотором круге. Докажите, что любая квадрируемая фигура ограничена.

Принцип Дирихле для площадей

Следующее геометрическое утверждение напоминает известный "принцип ящиков" Дирихле (P. Dirichlet), и потому обычно называется геометрическим принципом Дирихле или принципом Дирихле для площадей.

Теорема 1. *Пусть A – квадрируемая фигура, и $A_1, \dots, A_m$ – квадрируемые фигуры, содержащиеся в A. Предположим, что*

$$S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_m).$$

Тогда как минимум две из фигур $A_1, \dots, A_m$ имеют общую внутреннюю точку.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$S(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_m).$$

Условия $A_1, \dots, A_m \subseteq A$ влекут

$$S(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \le S(A).$$

Полученное противоречие с условием завершает доказательство. □

По аналогии с "обобщенным принципом ящиков" можно рассмотреть следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть A – квадрируемая фигура, и $A_1, \dots, A_m$ – квадрируемые фигуры, содержащиеся в A. Предположим, что*

$$nS(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_m)$$

для некоторого натурального $n < m$. Тогда как минимум $n+1$ из фигур $A_1, \dots, A_m$ имеют общую внутреннюю точку.

Доказательство. Если никакие $n+1$ из наших фигур не имеют общей внутренней точки, то открытая часть множества $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ учитывается в сумме $S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_m)$ не более n раз, и потому $S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_m) \le nS(A)$. □

Задача 3. Внутри квадрата со стороной 1 помещена фигура, площадь которой больше $\frac{1}{2}$. Докажите, что эта фигура содержит две точки, симметричные относительно центра квадрата.

Указание. Рассмотрите вторую фигуру, которая получается из первой центральной симметрией.

Задача 4. На сфере имеется пятно, площадь которого больше половины площади сферы. Доказать, что это пятно покрывает пару диаметрально противоположных точек сферы.

Задача 5. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0.51. Докажите, что существует прямая, параллельная одной из сторон квадрата и пересекающая не менее двух окружностей.

Задача 6. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что существует прямая, пересекающая не менее четырех окружностей.

Теоремы Блихфельдта и Минковского

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и через каждую точку с целыми координатами проведем две прямые, параллельные координатным осям. Полученная система прямых называется *целочисленной решеткой*, а точки с целыми координатами – *узлами* целочисленной решетки. Целочисленная решетка разбивает плоскость на квадраты со стороной 1.

Рассмотрим целочисленную решетку и некоторую квадрируемую плоскую фигуру. Число покрытых фигурой узлов зависит не только от формы фигуры, но и от ее расположения. Например, имеются фигуры сколь угодно большой площади, не покрывающие ни одного узла (приведите пример !).

Теорема Блихфельдта. Пусть A – квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой $> n$. Тогда фигуру A можно параллельно перенести таким образом, что она покроет не менее $n+1$ узла целочисленной решетки.

Доказательство. Квадраты целочисленной решетки разрезают фигуру A на конечное число кусков (A ограничена !). Условие $S(A) > n$ показывает, что число кусков $\geq n+1$. Сложим все квадратики, которые пересекает наша фигура, "в колоду". Мы получим $\geq n+1$ фигур внутри квадрата со стороной 1, суммарная площадь которых $> n$. Согласно теоремы 2, примененой к единичному квадрату, найдется точка P, которая принадлежит не менее чем $n+1$ куску нашей фигуры. Остается применить к A параллельный перенос на вектор, соединяющий P с некоторым узлом целочисленной решетки. $\square$

При $n = 1$ теорему Блихфельдта можно переформулировать так.

Теорема 3. *Пусть A – квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой > 1. Тогда в A можно найти две несовпадающие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такие, что $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ – целые числа.*

Плоская фигура A называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит отрезок, их соединяющий.

Следующая теорема, принадлежащая немецкому математику Герману Минковскому, возникла в рамках геометрической теории чисел.

Теорема Минковского. Пусть A – симметричная относительно начала координат выпуклая квадрируемая фигура площади > 4. Тогда A содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

Доказательство. Применив к A гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{2}$, мы получим фигуру B площади > 1. По теореме 3 фигура B содержит несовпадающие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), для которых числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ целые. В силу симметричности точка $(-x_1, -y_1)$ лежит в B, а в силу выпуклости в B лежит и середина O отрезка, соединяющего $(-x_1, -y_1)$ и (x_2, y_2). Точка O имеет координаты $(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2})$. Значит, точка с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ лежит в A. $\square$

Задача 7. Пусть A – квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой $< n$. Докажите, что A можно параллельно перенести так, что она покроет не более $n-1$ узла целочисленной решетки.

Задача 8. Покажите на примере, что в теореме Минковского условие $S(A) > 4$ нельзя заменить на условие $S(A) \geq 4$.

Задача 9. Пусть A – симметричная относительно начала координат выпуклая квадрируемая фигура площади $> 4n$. Докажите, что A содержит не менее $2n+1$ точек с целыми координатами.

Теорема Дирихле об аппроксимации иррациональных чисел

Рассмотрим иррациональное число α, натуральное число s и множество

$$A = \{(x,y) : |\alpha x - y| < \frac{1}{s},\ |x| \le s + \frac{1}{2}\}.$$

Это множество есть параллелограмм, площадь которого равна $\frac{2}{s} \cdot 2(s+\frac{1}{2}) = 4(1+\frac{1}{2s}) > 4$. Эта фигура выпукла и симметрична относительно начала координат. Теорема Минковского утверждает, что в A есть точка с целыми координатами, отличная от $(0,0)$. Можно считать, что первая координата этой точки положительна (объясните это !). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема Дирихле. Для произвольных иррационального числа α и натурального числа s найдутся такие целые числа x и y, что $0 < x \le s$ и

$$|\alpha x - y| < \frac{1}{s}.$$

Задача 10. Докажите, что для произвольного иррационального числа α существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{m}{n}$ таких, что $|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$.

Задача 11. Докажите, что для произвольных иррационального числа α и натурального числа s существует рациональное число $\frac{m}{n}$ такое, что $n \le s$ и $|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{ns}$.

Указание. Рассмотрите дробные части чисел α, 2α, $\ldots$, $s\alpha$, разделите отрезок $[0,1]$ на s равных частей и, рассмотрев два случая, используйте "обычный" принцип Дирихле.

Литература

[1] А. Лебег. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
[2] М.Й. Ядренко. Принцип Дiрiхле та його застосування. Киев: Вища школа, 1985.

кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова

E-mail address: arjantse@mccme.ru