Оглавление

Введение

Конические сечения обладают самыми разнообразными математическими и физическими свойствами, их значение в окружающей нас жизни довольно велико.

Конические сечения можно классифицировать различными способами: можно дать классификацию на основе отношения расстояния от фокуса до сечения к расстоянию от сечения до директрисы, я дал классификацию на основе взаимного расположения конуса, секущей его плоскости и оси этого конуса.

На основе приведённого ниже доклада мне удалось выявить несколько интересных свойств конических сечений и найти новые способы их построения. Также в работе исследуются вытекающие из новых построений свойства сечений.

Цель

Изучение конических сечений с различных позиций, их классификация, выявление их свойств в результате анализа полученных способов построения.

Задачи

1. Классифицировать случаи взаимного расположения простого кругового конуса и пересекающей его плоскости.

2. Доказать, что парабола является графиком квадратичной функции, гипербола – графиком обратной пропорциональности

3. Основываясь на свойствах конических сечений, разработать некоторые способы их построения.

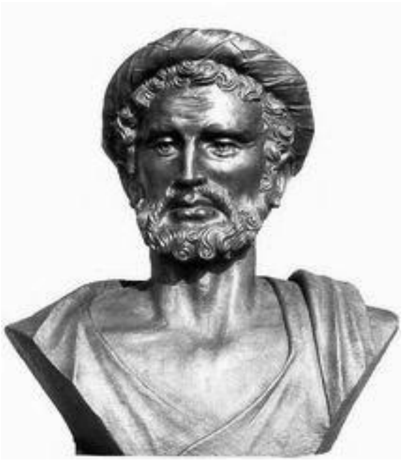
4. Выявить свойства конических сечений в результате анализа построений.

§ 1. Конус. Конические сечения

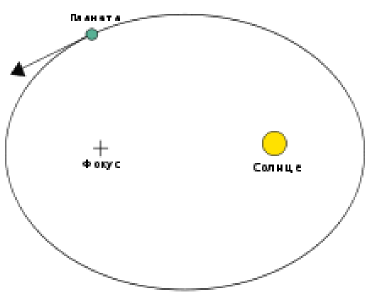
Обзор литературы

История конических сечений

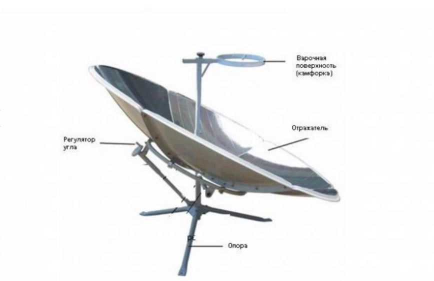
Открывателем конических сечений предположительно считается Менехм (4 в. до н.э.), ученик Платона и учитель Александра Македонского. В середине четвёртого века до нашей эры он доказал, что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конуса. Наиболее полное исследование конических сечений изложено в книге "Коника" Аполлония Пергского, написанной, как считается, между 210 и 200 годами до н. э. Аполлоний был третьим после Евклида и Архимеда великим представителем Александрийской школы. Его "Коника" - настоящий научный подвиг. Это грандиозный труд, состоящий из восьми книг. В первых семи книгах, дошедших до нас, содержится 387 теорем, подчас весьма сложных, с подробными доказательствами. В течении двух тысячелетий "Коника" была настольной книгой математиков и главным руководством по изучению конических сечений. Теория конических сечений изложена Аполлонием настолько подробно и глубоко, что математикам мало что удавалось добавить нового, несмотря на бурный прогресс математической науки.



Значение конических сечений в природе и технике



Значение конических сечений в нашей жизни довольно велико. Например, орбиты планет, вращающихся вокруг своей звезды — эллипсы, причём звезда находится в фокусе этого эллипса (на самом деле и спутники планет вращаются вокруг них по такому же принципу). Этот закон небесной механики – первый закон Кеплера – является одной из главных причин смены времён года на земле. Кометы движутся в пределах солнечной системы почти по гиперболе.



Оптическое свойство параболы широко применяется сегодня в самых различных сферах жизни — карманный фонарик, автомобильные фары, прожекторы и т.д. Из-за этого же свойства параболу также часто можно встретить в конструкции различных солнечных батарей и солнечных кухонь. Широкое применение нашли параболические зеркала и в конструкции телескопов. Траекторией подброшенного вверх тела также является парабола.

Эллипс, гипербола и парабола имеют, кроме приведенных выше, многочисленные геометрические свойства и физические приложения.

Напомню некоторые факты, описанные в математической литературе.

Прямой круговой конус – геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и образующих данный угол $\alpha < 90°$ с прямой l, проходящей через точку A. Прямые называются **образующими конуса**, прямая l его **осью**, а точка A – его **вершиной**. Таким образом, конус является неограниченной фигурой и состоит из двух половинок, центрально-симметричных относительно вершины A. Если направляющая — прямая, то конус превращается в плоскость. Если направляющая — кривая 2-го порядка, не лежащая в одной плоскости с вершиной, то получают конус 2-го порядка (где направляющей служит эллипс). Простейшим из конусов 2-го порядка является круглый конус, или прямой круговой конус, направляющей которого служит окружность.

Кривая второго порядка — геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

в котором, по крайней мере, один из коэффициентов a_{ij} отличен от нуля.

С точки зрения аналитической геометрии коническое сечение представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению второго порядка.

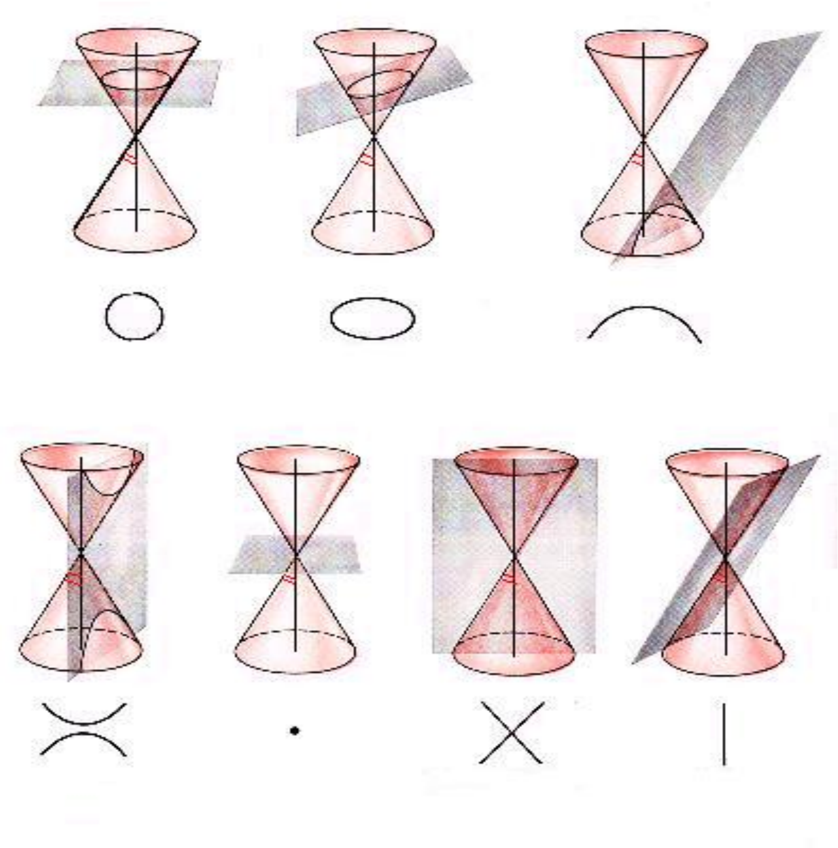
Существует три главных типа конических сечений: эллипс, парабола и гипербола, кроме того существуют вырожденные сечения: точка, прямая и пара пересекающихся прямых.

Классификация конических сечений

Мне представляется интересным описать все многообразие конических сечений как **пересечений простого кругового конуса и плоскости.**

В основу данной классификации мною положено **взаимное расположение плоскости и оси конуса с учетом угла между ними, а также угла между образующей и осью конуса**. Пусть **α** — угол между образующей и осью конуса, **β** — угол между осью конуса и плоскостью, пересекающей этот конус. Получены следующие сечения.

1. Плоскость содержит ось конуса. В этом случае коническим сечением является **пара пересекающихся прямых**.



2. Плоскость пересекает ось конуса.

2.1. Плоскость пересекает ось конуса **в вершине** — в зависимости от соотношения **α** и **β** получаются:

2.1.1. При **β > α** сечением является **точка**.

2.1.2. При **β = α** сечением является **прямая**.

2.1.3. При **$\beta < \alpha$** сечением является **пара пересекающихся прямых**.

2.2.Плоскость пересекает ось конуса **не в вершине**

2.2.1. Плоскость **параллельна одной из образующих** данного конуса. Коническое сечение — **парабола**.

2.2.2. Плоскость **не параллельна ни одной из образующих** данного конуса. Коническое сечение — эллипс. В частности, если **плоскость перпендикулярна оси** конуса, сечением является **окружность**.

3. Плоскость параллельна оси конуса, но не содержит её. Сечение — **гипербола**.

§2. Кривые второго порядка как геометрические места точек плоскости.

Обзор литературы

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек есть величина постоянная. Данные фиксированные точки называются **фокусами** эллипса.

Фокус кривой (или поверхности) в геометрии — точка, для которой выполняется определённое соотношение со всеми точками кривой (поверхности).

Проходящий через фокусы эллипса отрезок, концы которого лежат на эллипсе, называется **большой осью** данного эллипса.

Отрезок, перпендикулярный большой оси эллипса, проходящий через середину большой оси, концы которого лежат на эллипсе, называется **малой осью** эллипса.

Точка пересечения большой и малой осей эллипса называется его **центром**.

Расстояния r_1 и r_2 от каждого из фокусов до данной точки на эллипсе называются **фокальными радиусами** в этой точке.

Точки пересечения эллипса с осями называются его **вершинами.**

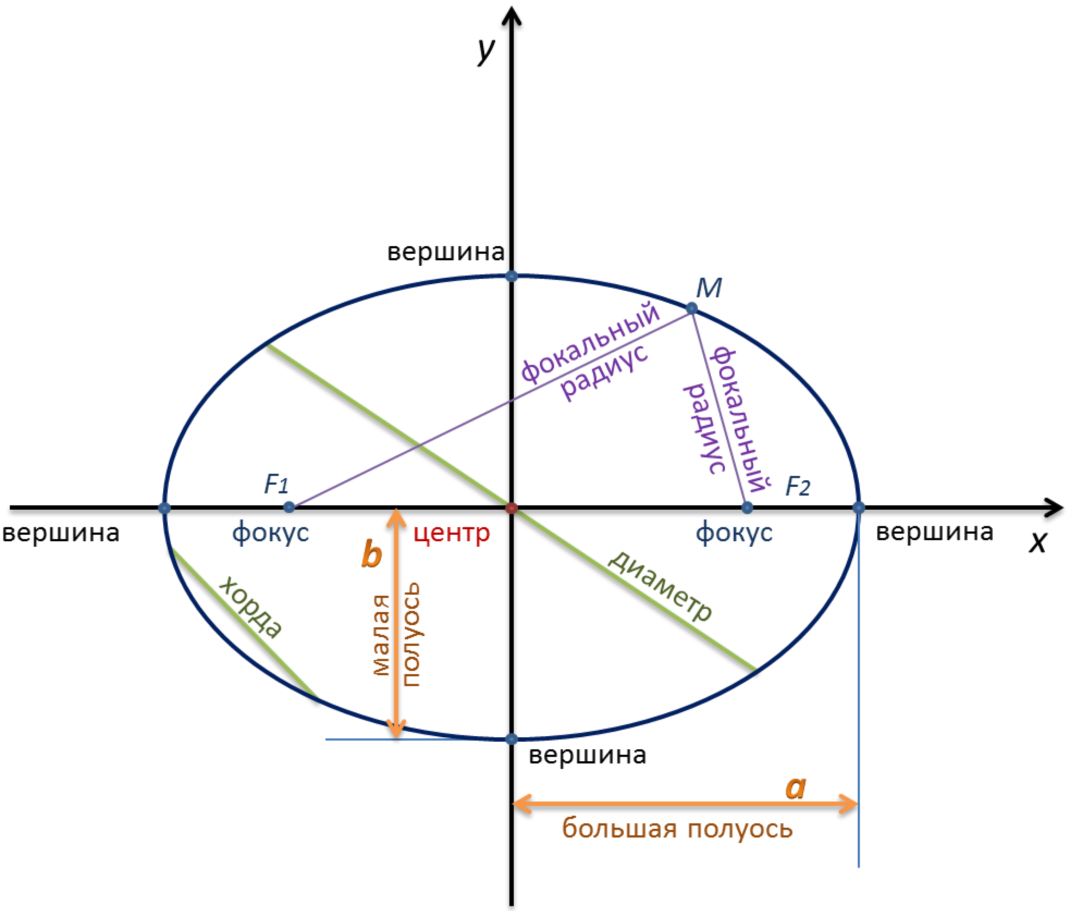
Отрезки, проведённые из центра эллипса к вершинам на большой и малой осях, называются соответственно, **большой полуосью** и **малой полуосью** эллипса.

Хордой эллипса называют отрезок, соединяющий две его точки.

Диаметром эллипса называют произвольную хорду, проходящую через его центр.

Отношение длин малой и большой полуосей называется **коэффициентом сжатия эллипса** или **эллиптичностью**: $k = \frac{b}{a}$.

Величина, равная $1-k=\frac{a-b}{a}$ называется **сжатием эллипса**.



Окружность является частным случаем эллипса.

Рассмотрим эллипс с фокусами F_1 и F_2 такой, что для любой его точки M $|F_1M|+|F_2M|=2a$.

Предположим, что фокусы эллипса совпадают, т.е. $F_1=F_2$, и обозначим эту точку F. Данное предположение не противоречит определению эллипса.

Тогда $|F_1M|+|F_2M|=2FM$ и $2FM=2a$. Значит $FM=a=const$.

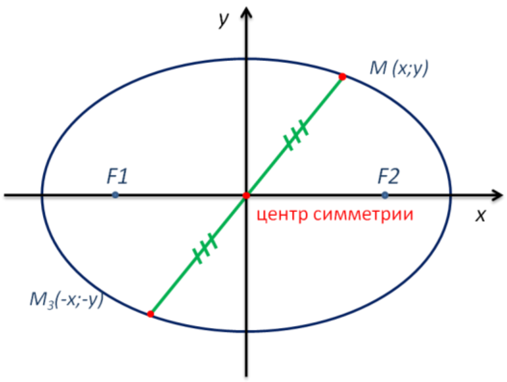
Таким образом, мы получили фигуру, у которой все точки равноудалены от фокуса F. Эта фигура является **окружностью** с центром в точке F радиуса a по определению.

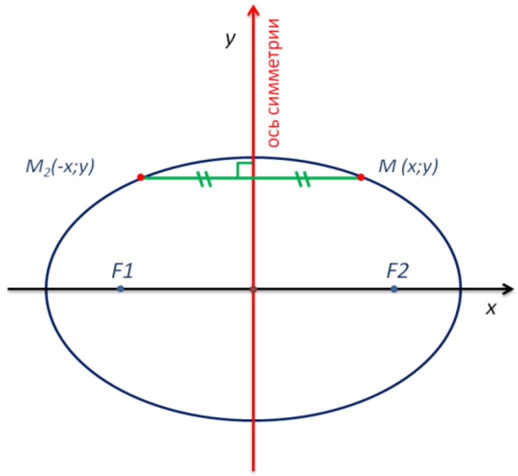
В частности, уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$ является частным случаем уравнения эллипса. Действительно, разделив обе части уравнения на r^2, получим $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$ – уравнение эллипса с равными полуосями.

Отметим, что коэффициент сжатия эллипса равен единице, а сжатие равно нулю.

Симметричность эллипса

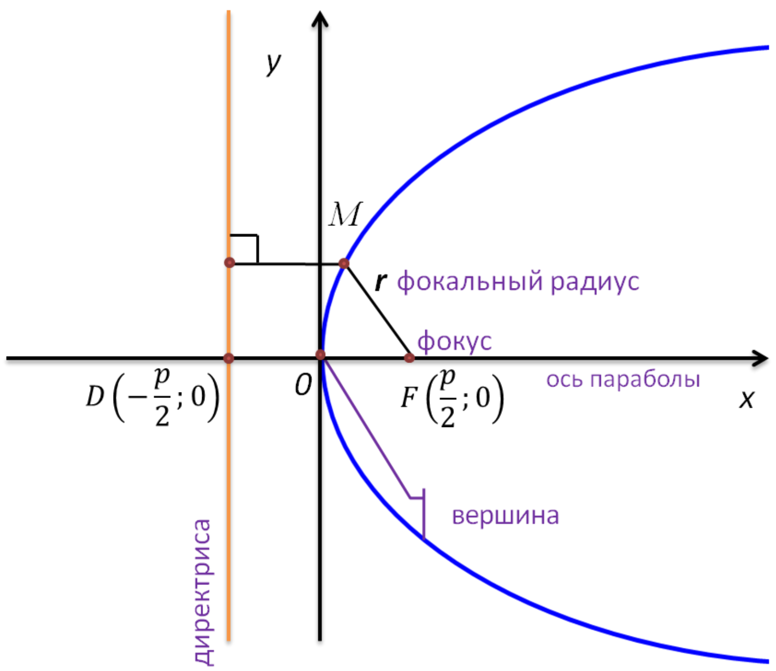
Прямые, содержащие оси эллипса, являются его осями симметрии, а центр эллипса – его центром симметрии.





Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой **фокусом параболы**, и расстояние до некоторой фиксированной прямой той же плоскости, называемой **директрисой параболы**, равны.



Отрезок, соединяющий точку параболы с фокусом, называется **фокальным радиусом точки параболы.**

Прямая, проходящая через фокус параболы и перпендикулярная ее директрисе, называется **осью параболы**. Ось параболы пересекается с параболой в единственной точке. Точка пересечения параболы с осью называется ее **вершиной**.

Ось параболы является ее **осью симметрии.**

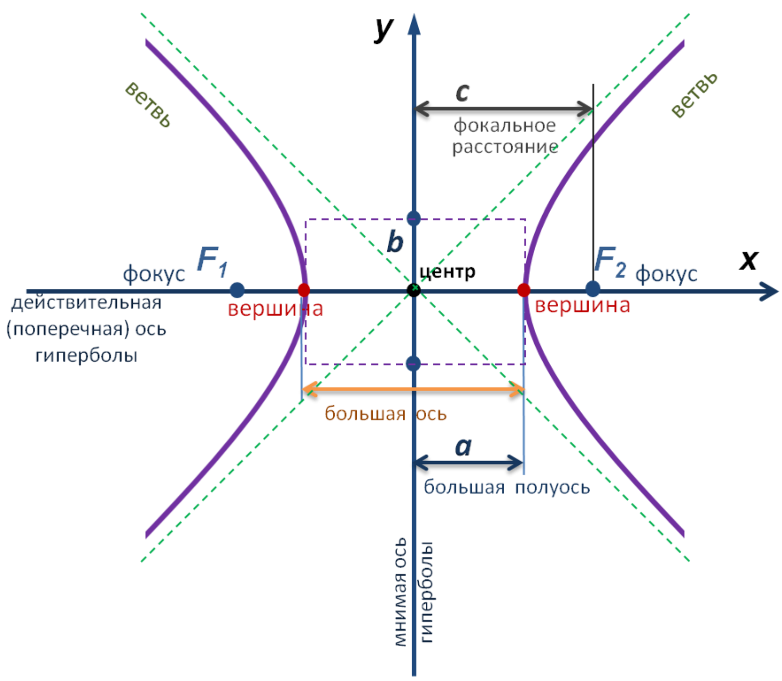
Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых **фокусами гиперболы**, есть величина постоянная.

Гипербола состоит из двух отдельных кривых, которые называют **ветвями**. Ближайшие друг к другу точки двух ветвей гиперболы называются **вершинами**. Середина отрезка, соединяющего фокусы гиперболы называется **центром** гиперболы. Кратчайшее расстояние между двумя ветвями гиперболы называется **большой осью** гиперболы. Расстояние от центра гиперболы до одного из фокусов называется **фокальным расстоянием**. Обычно обозначается ***c***.

Расстояние от центра гиперболы до одной из вершин называется **большой полуосью** гиперболы. Прямая, на которой лежат фокусы гиперболы, называется **действительной,** или **фокальной,** или **поперечной осью** гиперболы.

Прямая, перпендикулярная действительной оси и проходящая через её центр называется **мнимой осью** гиперболы. Гипербола пересекает действительную ось в двух точках, а мнимую ось не пересекает.



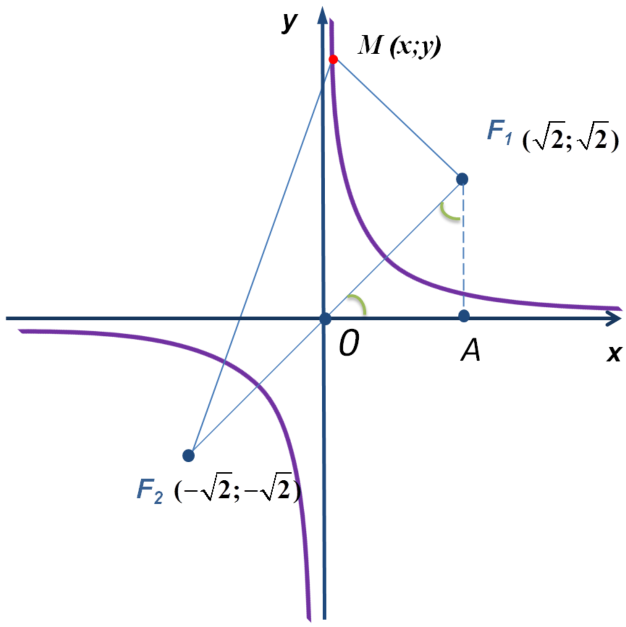
Гипербола **симметрична** относительно действительной и мнимой осей, а также относительно своего центра (эти факты будут доказаны позже).

Можно доказать, что кривые второго порядка парабола и гипербола являются графиками квадратичной функции и обратной пропорциональности соответственно. Докажу этот факт для гиперболы.

Гипербола как график функции $y=\dfrac{1}{x}$.

Рассмотрим гиперболу, для которой расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c=4$, а модуль разности расстояний от произвольной точки до фокусов равно $2a=2\sqrt{2}$. Для вывода ее уравнения введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат следующим образом. Начало координат совместим с серединой отрезка F_1F_2, а оси абсцисс и ординат расположим таким образом, чтобы прямая F_1F_2 содержала биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Так как F_1F_2 равно 4, то расстояние $OF_1=OF_2=2$. Рассмотрим треугольник $\triangle AOF_1$. Он является прямоугольным, а значит по теореме Пифагора $AO^2+AF_1^2=4$. Так как данный треугольник является равнобедренным (по двум углам при основании), то расстояние $AO=AF_1$, а значит $2AO^2=4$, получаем, что $AO=AF_1=\sqrt{2}$. Таким образом, координаты фокуса $F_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$.



Аналогично получаем координаты фокуса $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Тогда $MF_1=\sqrt{\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x-\sqrt{2}\right|^2}$, а $MF_2=\sqrt{\left|x+\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2}$.

По условию, $\left|MF_1-MF_2\right|=2\sqrt{2}$, значит, верно равенство

$$\left|\sqrt{\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x-\sqrt{2}\right|^2}-\sqrt{\left|x+\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2}\right|=2\sqrt{2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2-2\sqrt{\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x-\sqrt{2}\right|^2}\sqrt{\left|x+\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2}=8$$

Раскроем квадраты сумм и разностей

$$x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-2\sqrt{2}y+2+x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2-$$
$$-2\sqrt{\left|x-\sqrt{2}\right|^2+\left|x-\sqrt{2}\right|^2}\sqrt{\left|x+\sqrt{2}\right|^2+\left|x+\sqrt{2}\right|^2}=8$$

Значит,

$$2x^2+2y^2+8-2\sqrt{(x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-2\sqrt{2}y+2)(x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2)}=8$$

Отсюда

$$x^2+y^2=\sqrt{(x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2-2\sqrt{2}y+2)(x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2)}.$$

Или

$$x^2+y^2=\sqrt{(x^2+y^2+4)^2-2\sqrt{2(x+y)}}$$

Получаем

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4+x^2y^2+4x^2+x^2y^2+y^4+4y^2+4x^2+4y^2+16-(8x^2+16xy+8y^2)}$$

Повторно возведем обе части уравнения в квадрат

$$x^4+2x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+8x^2+y^4+8y^2+16-8x^2-16xy-8y^2$$

Упрощая выражение, получим $16xy=1$, или, после сокращения и переноса переменной, $y=\frac{1}{x}$.

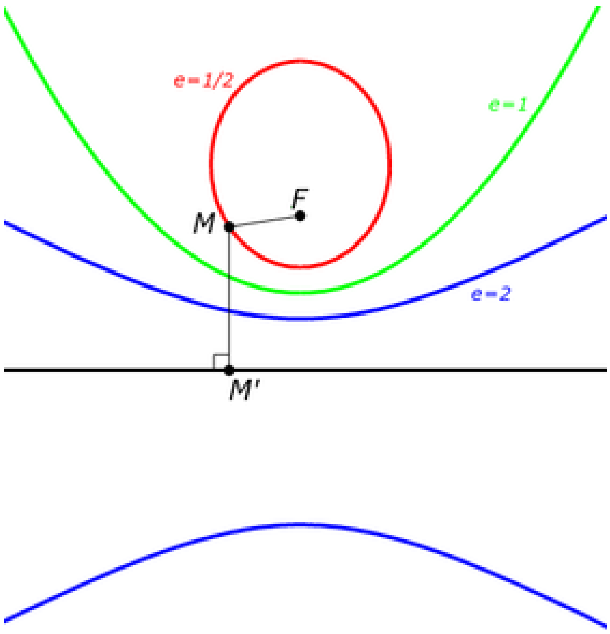
Таким образом, мы доказали, что гипербола является графиком обратной пропорциональности.

§ 3. Построения конических сечений

Обзор литературы

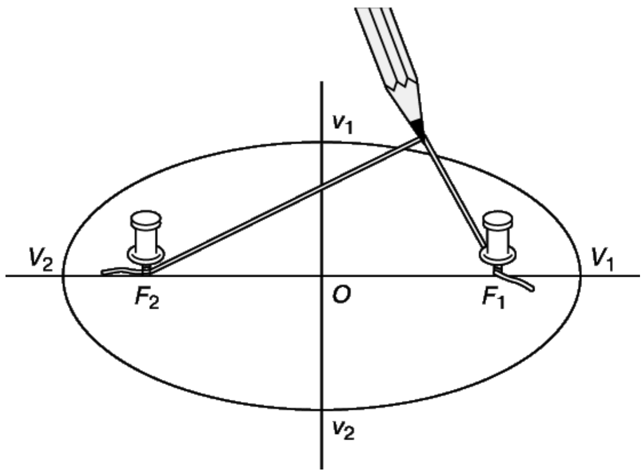
Описание конических сечений через эксцентриситет

Все невырожденные конические сечения, кроме окружности, можно определить следующим способом: выберем на плоскости точку F и прямую d и зададим действительное число $e > 0$. Тогда геометрическое место точек, для которых расстояние до точки F и до прямой d отличается в e раз, называется коническим сечением, т.е. $FM = e \cdot MM'$.Точка F называется фокусом конического сечения, прямая d — директрисой, число е эксцентриситетом .В зависимости от эксцентриситета, получится: при $e > 1$ — гипербола, при $e = 1$ — парабола, при $e < 1$ — эллипс.



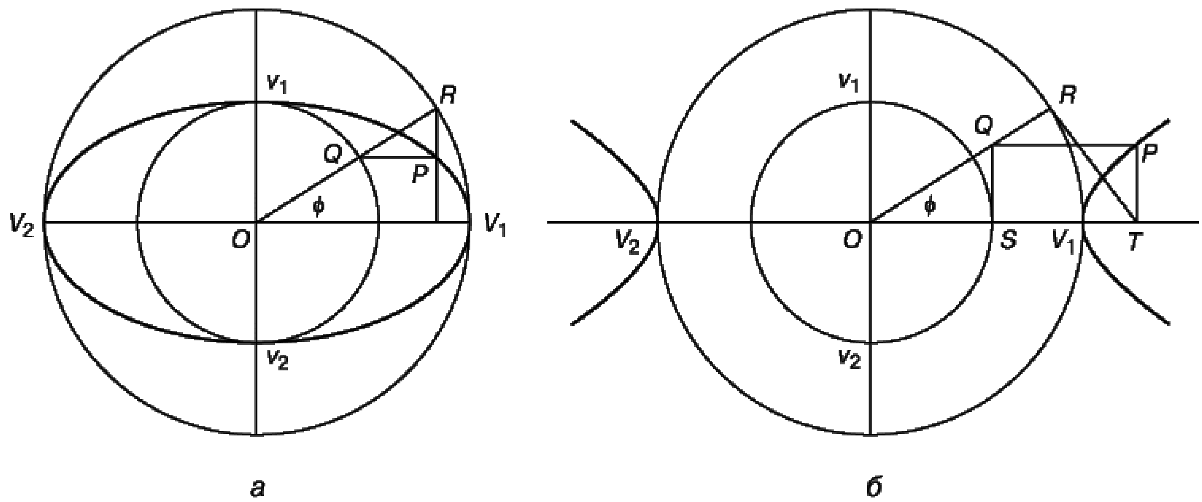
Построения эллипса

1) Если концы нити заданной длины закреплены в точках $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, то кривая, описываемая острием карандаша, скользящим по туго натянутой нити, имеет форму эллипса. Точки $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ называются фокусами эллипса, а отрезки $\boldsymbol{V_1V_2}$ и $\boldsymbol{v_1v_2}$ между точками пересечения эллипса с осями координат – большой и малой осями. Если точки $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ совпадают, то эллипс



превращается в окружность.

2) Пусть произвольная прямая, проходящая через точку ***O*** (рис. ***а***), пересекает в точках ***Q*** и ***R*** две концентрические окружности с центром в точке ***O*** и радиусами ***b*** и ***a***, где ***b*** < ***a***. Проведем через точку ***Q*** горизонтальную прямую, а через ***R*** – вертикальную прямую, и обозначим их точку пересечения ***P***. Тогда геометрическим местом точек ***P*** при вращении прямой ***OR*** вокруг точки ***O*** будет эллипс. Угол ***f*** между прямой ***OQR*** и большой осью называется эксцентрическим углом.

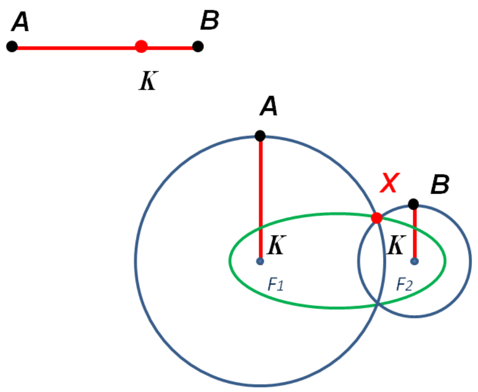


3) Эллипс можно построить с помощью эпициклического движения. Если окружность катится без скольжения по внутренней стороне другой окружности вдвое большего диаметра, то каждая точка ***P*** , не лежащая на меньшей окружности, но неподвижная относительно нее, опишет эллипс. Если точка ***P*** находится на меньшей окружности, то траектория этой точки представляет собой вырожденный случай эллипса – диаметр большей окружности.

4) Если концы ***A*** и ***B*** отрезка прямой ***AB*** заданной длины скользят по двум неподвижным пересекающимся прямым (например, по координатным осям), то каждая внутренняя точка ***P*** отрезка опишет эллипс.

5) Любая точка в плоскости пересекающихся прямых, неподвижная относительно скользящего отрезка, также опишет эллипс.

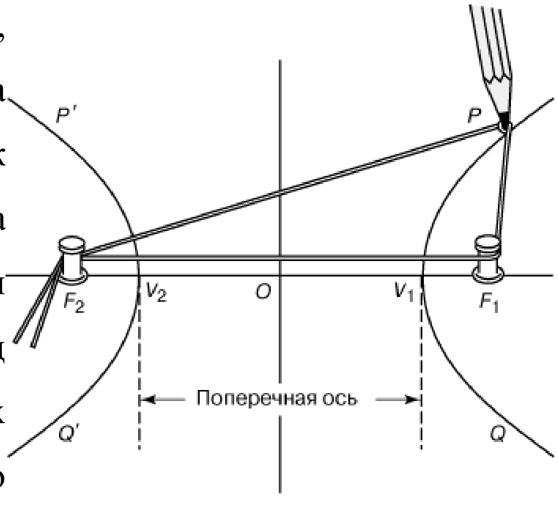
6) На отрезке AB возьмём точку K, построим окружность с центром F_1 и радиусом AK и окружность с центром F_2 и радиусом KB. Пусть X - точка пересечения этих окружностей, тогда X лежит на эллипсе.



Построения гиперболы

1) Произвольная прямая, проходящая через точку $\boldsymbol{O}$, пересекает одну из двух окружностей в точке $\boldsymbol{R}$ (рис. *б*). К точке $\boldsymbol{R}$ одной окружности и к конечной точке $\boldsymbol{S}$ горизонтального диаметра другой окружности проведем касательные, пересекающие $\boldsymbol{OS}$ в точке $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{OR}$ – в точке $\boldsymbol{Q}$. Пусть вертикальная прямая, проходящая через точку $\boldsymbol{T}$, и горизонтальная прямая, проходящая через точку $\boldsymbol{Q}$, пересекаются в точке $\boldsymbol{P}$. Тогда геометрическим местом точек $\boldsymbol{P}$ при вращении отрезка $\boldsymbol{OR}$ вокруг $\boldsymbol{O}$ будет гипербола.

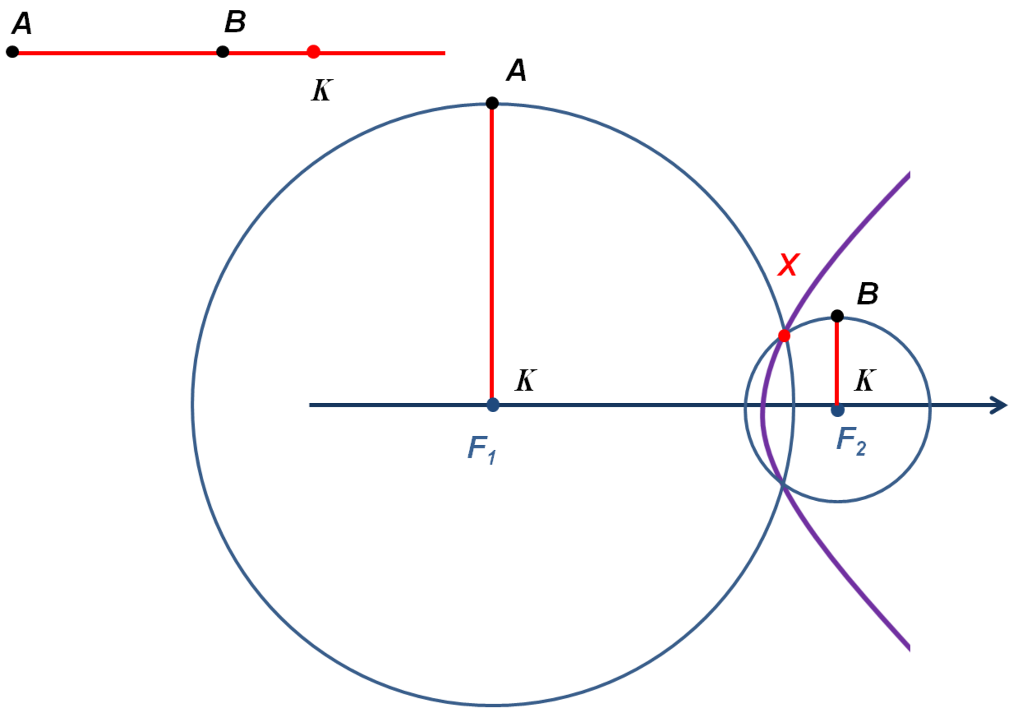
2)При построении гиперболы точка $\boldsymbol{P}$, острие карандаша, фиксируется на нити, которая свободно скользит по шпенькам, установленным в точках $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, как показано на рисунке. Расстояния подобраны так, что отрезок $\boldsymbol{PF_2}$ превосходит по длине отрезок $\boldsymbol{PF_1}$ на фиксированную величину, меньшую расстояния $\boldsymbol{F_1F_2}$. При этом один конец нити проходит под шпеньком $\boldsymbol{F_1}$ и оба конца нити проходят поверх шпенька $\boldsymbol{F_2}$. (Острие карандаша не должно скользить по нити, поэтому его нужно закрепить, сделав на нити маленькую петлю и продев в нее острие.) Одну ветвь гиперболы ($\boldsymbol{PV_1Q}$) мы вычерчиваем, следя за тем, чтобы нить оставалась все время натянутой, и потягивая оба конца нити вниз за точку $\boldsymbol{F_2}$, а когда точка $\boldsymbol{P}$ окажется ниже отрезка $\boldsymbol{F_1F_2}$, придерживая нить за оба конца и осторожно потравливая (т.е. отпуская) ее. Вторую ветвь гиперболы **(**$\boldsymbol{P`V_2Q`}$ **)** мы вычерчиваем, предварительно поменяв ролями шпеньки $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$. Ветви гиперболы приближаются к двум прямым, которые



a

пересекаются между ветвями. Эти прямые, называемые асимптотами гиперболы, строятся как показано на рисунке. Угловые коэффициенты этих прямых равны ± $(v_1v_2)/(V_1V_2)$, где v_1v_2 – отрезок биссектрисы угла между асимптотами, перпендикулярной отрезку F_1F_2; отрезок v_1v_2 будет сопряженной осью гиперболы, а отрезок V_1V_2 – ее поперечной осью. Таким образом, асимптоты являются диагоналями прямоугольника со сторонами, проходящими через четыре точки v_1 , v_2, V_1 , V_2 параллельно осям. Чтобы построить этот прямоугольник, необходимо указать местоположение точек v_1 и v_2.

3) На луче AB возьмём точку K, не лежащею на отрезке AB, построим окружность с центром F_1 и радиусом AK и окружность с центром F_2 и радиусом KB. Пусть X – точка пересечения этих окружностей, X лежит на гиперболе.



Так как $AK = AB + KB$, $AB = AK - KB$, $XF_1 = AK$ и $XF_2 = KB$, $AB = AK - KB = XF_1 - XF_2$ и $AB = AK - KB = XF_1 - XF_2$, то X лежит на гиперболе с фокусами в точках F_1 и F_2 и разностью расстояний до них равной AB (по определению гиперболы).

Собственные построения

Я предлагаю построения точек параболы и гиперболы **с помощью циркуля и линейки**.

Построение параболы

Пусть у нас есть произвольная прямая ***p*** и точка ***Q***, не лежащая на ней.

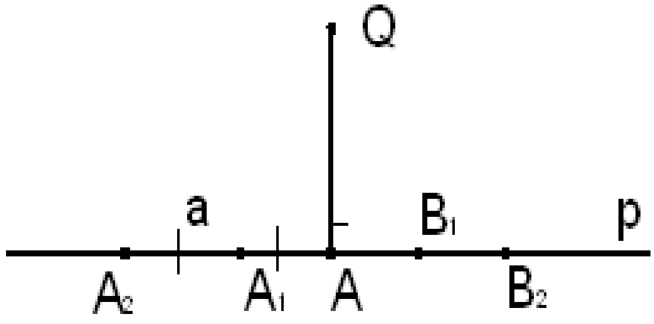
Построим параболу так, чтобы прямая ***p*** была её директрисой, а точка ***Q*** — её фокусом.

Построение.

1. Опустим перпендикуляр из точки ***Q*** на прямую ***p***, точку пересечения назовём ***A***.

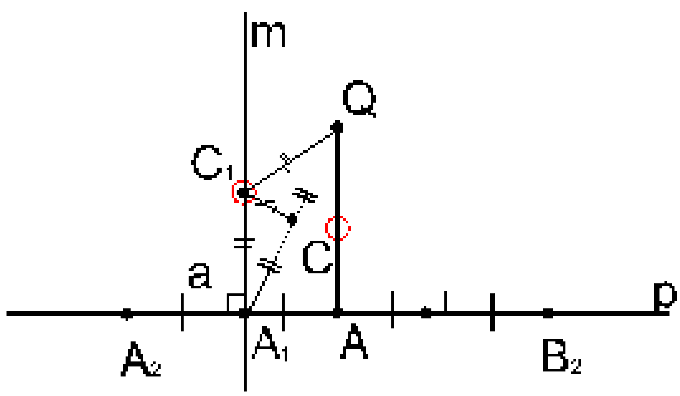
2. Точка C – середина отрезка ***QA*.**

3. Теперь будем откладывать от точки ***A*** в разные полуплоскости (относительно прямой *AQ*) на прямой ***p*** один за другим произвольные отрезки длины ***a***. Концы этих отрезков назовём в одной полуплоскости A_1, A_2,… соответственно по мере их удаления от ***A***, а в другой полуплоскости — B_1, B_2,… также соответственно по мере их удаления от ***A***.

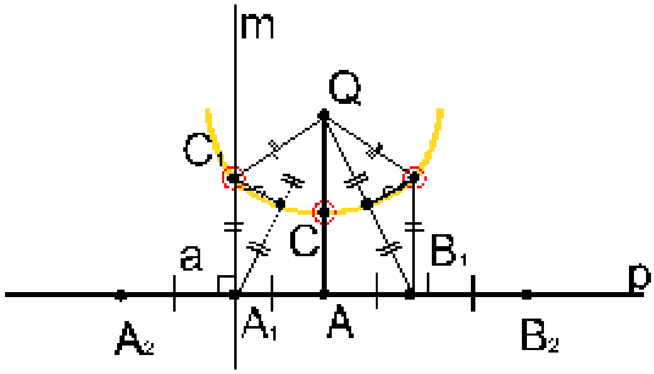


4. Через точку A_1 проведём прямую ***m*,** перпендикулярную прямой ***p***.

5. Построим серединный перпендикуляр CC_1 к отрезку QA_1, причём ***C*** середина QA_1 , а C_1 – точка пересечения с ***m***.



Проделывая подобные операции для точек A_2, A_3,… и B_1, B_2,… можно получить другие точки параболы.



Заметим, что удалённость друг от друга построенных точек зависит от длины отрезка ***a***— чем меньше ***a***, тем ближе друг к другу точки параболы и, соответственно, точнее рисунок.

Доказательство.

Докажу, что построенные точки $\boldsymbol{C, C_1, C_2,}$ … лежат на параболе с центром Q и директрисой ***p***.

По признаку равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними треугольники $\boldsymbol{ACC_1}$ и $\boldsymbol{QCC_1}$ равны, следовательно равны и стороны этих треугольников $\boldsymbol{A_1C_1}$ и $\boldsymbol{QC_1}$, так как они в равных треугольниках лежат против равных сторон. Длина отрезка $\boldsymbol{A_1C_1}$ является для точки $\boldsymbol{C_1}$ расстоянием до прямой ***p*** , а длина отрезка $\boldsymbol{QC_1}$ – расстоянием до точки ***Q***. Эти отрезки равны, следовательно равны их длины, то есть расстояния до точки ***Q*** и прямой ***p***, следовательно из определения параболы получается, что точка $\boldsymbol{C_1}$ лежит на параболе с фокусом ***Q*** и директрисой ***p***.

Выводы из данного построеия :

- Из данного построения можно сделать следующий вывод: для данной прямой и данной точки, не лежащей на данной прямой, существует такая парабола, что данная точка является её фокусом, а данная прямая — директрисой.

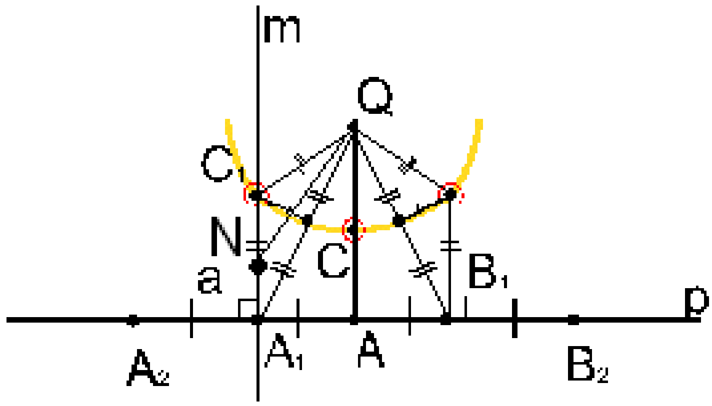
- Ещё один интересный вывод: если две или более парабол имеют общую директрису, их фокусы удалены от этой директрисы на одинаковые расстояния, то сами кривые равны.

- Если у двух парабол общая директриса, их фокусы удалены от неё на одинаковые расстояния, но располагаются в разных полуплоскостях относительно этой прямой, то и сами параболы располагаются в разных полуплоскостях относительно их директрисы.
- Если фокусы находятся в одной полуплоскости относительно директрисы, то кривые либо пересекаются, либо совпадают.

Построение гиперболы

Построение

Построение гиперболы на первых этапах аналогично построению параболы. Как только мы получим равнобедренный треугольник $\boldsymbol{A_1C_1Q}$ с основанием $\boldsymbol{A_1Q}$, проводим биссектрису угла $\boldsymbol{C_1QA_1}$. Точку пересечения биссектрисы с прямой $\boldsymbol{m}$ назовём $\boldsymbol{N}$. Так как QN больше чем QC_1, то она также и меньше чем C_1A_1. Мы получаем, что расстояние от точки N до точки Q больше, чем расстояние до точки A_1 и соответственно прямой p. Таким образом, точка N принадлежит геометрическому месту точек, для которых расстояние от данной точки больше, чем расстояние до данной прямой, иначе говоря, точка N принадлежит гиперболе с фокусом Q и директрисой p.



Выводы из данного построения :

- Из данного построения можно сделать такой же вывод, что и для параболы: для данной прямой и данной точки, не лежащей на данной прямой, существует такая гипербола, что данная точка является её фокусом, а данная прямая — директрисой. Однако, в отличие от параболы, если две или более гипербол имеют общую директрису, их фокусы удалены от этой директрисы на одинаковые расстояния, то сами кривые не обязаны быть равны. Парабола при помощи любого построения относительно фокуса и директрисы определяется однозначно, а гипербола — нет.

- Если две или более гипербол имеют общую директрису, их фокусы удалены от этой директрисы на одинаковые расстояния, то для того, чтобы гиперболы были равны, нужно, чтобы и эксцентриситеты этих гипербол также были равны, а в данном построении они не участвуют. Данный способ построения не является единственно верным, возможны и другие похожие построения, при которых получившаяся кривая попадает под определение гиперболы. Учитывая это, даже если фокусы двух гипербол находятся в одной плоскости или даже совпадают, то сами гиперболы могут не только не пересекаться, но и не совпадать. В зависимости от эксцентриситета гиперболы с одинаковыми фокусами и директрисами могут не иметь ни одной общей точки, иметь две общих точки, четыре общих точек или бесконечно много общих точек(совпадать).

Заключение

К числу общих свойств эллипса, гиперболы и параболы можно отнести **биссекториальное свойство** их касательных и нормалей: касательная (нормаль) к эллипсу или к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания; касательная (нормаль) к параболе образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и перпендикуляром, опущенным из нее на директрису. Биссекториальное свойство касательной к параболе можно сформулировать так же, как для эллипса и гиперболы, если считать, что у параболы имеется второй фокус в бесконечно удаленной точке.

Из биссекториальных свойств следуют **оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы**, поясняющие физический смысл термина "фокус". Представим себе поверхности, образованные вращением эллипса, гиперболы или параболы вокруг фокальной оси (они называются соответственно **эллипсоид, гиперболоид и параболоид вращения**). Если на эти поверхности нанести отражающее покрытие, то получаются эллиптическое, гиперболическое и параболическое зеркала. Согласно закону оптики, угол падения луча света на зеркало равен углу отражения, т.е. падающий и отраженный лучи образуют равные углы с нормалью к поверхности, причем оба луча и ось вращения находятся в одной плоскости. Отсюда получаем следующие свойства:

– если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе;

– если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, расходятся так, как если бы они исходили из другого фокуса;

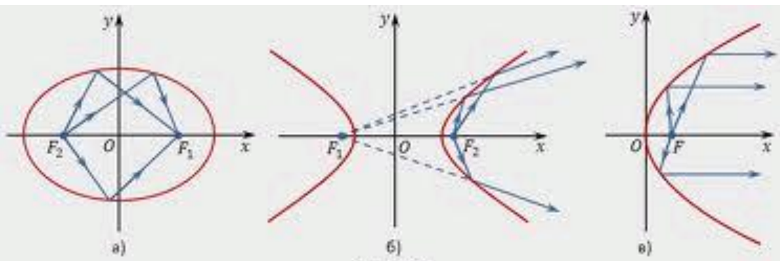


Рис. 3.52

– если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, идут параллельно фокальной оси и обратно: если лучи света идут параллельно фокальной оси, то, отразившись, они все пересекутся в фокусе параболического зеркала.

В дальнейшем мне бы хотелось использовать изученные мною факты и собственные выводы, полученные в данном исследовании, для проверки фокальных свойств. Для этого я планирую, с одной стороны, поставить серии физических экспериментов, а с другой стороны, доказать биссекториальные и фокальные свойства математически.

Список использованной литературы

1. Б.Л. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. М., 1959
2. П.С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. М., 1968
3. А. В. Акопян, А. А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
4. И. Н. Бронштейн. Общие свойства конических сечений. Квант, № 5, 1975.
5. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия, глава I.
6. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Глава IV, § 8.
7. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые «Популярные лекции по математике». Выпуск 04