Министерство образования и науки Республики Казахстан

Республиканский научно-практический центр «Дарын»

Республиканская специализированная физико-математическая

средняя школа-интернат им.О.Жаутыкова

Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных

Выполнил: А.Лепес

Ученик 11 класса

Научный руководитель: И.Ж. Ибатулин

Оглавление

Абстракт

Сегодня существует множество методов доказательства неравенств, некоторым из них посвящены десятки книг, некоторым сотни статей. Но несмотря на обилие методов и методик обучения практика проведения олимпиад показывает, что доказать неравенство обычно могут не более половины участников. Причем такая картина наблюдается на различных международных олимпиадах. Так, например,

на международной математической олимпиаде (далее IMO) в Аргентине в 2012 году из 548 участников задачу № 2 решило только 189,

на международной математической командной олимпиаде «Балтийский путь» (далее Baltic way) в 2011 году из 11 команд задачу №4 решило только 5 команд, причем среди задач по алгебре на этой олимпиаде задача №4 имеет самый низкий средний балл,

на международной Жаутыковской олимпиаде в 2013 году (13-19 января) из 159 участников по математике задачу № 3 решил только 1.

В связи с этим резонно поставить вопрос: почему такой низкий процент участников на олимпиадах могут доказать соответствующее неравенство? Тем более, что на международную математическую олимпиаду в странах участниках предварительно проходит многоуровневый отбор. Поэтому можно с уверенностью сказать, что все участники национальных команд стандартные неравенства знают.

Частично ответом на указанный вопрос может служить тот факт, что при доказательстве неравенств классическими методами отсутствует аналитическая составляющая и необходимо изобретать некоторые нестандартные преобразования, которые не имеют полной классификации. То есть не исследуются функции, участвующие в неравенстве, и ежегодно появляются все новые дополнительные преобразования, без которых применение классических неравенств невозможно. Большинству участников не помогает даже то, что для классических неравенств, таких как неравенство Коши, неравенство Коши-Буняковского (Коши-Шварца), транснеравенство, неравенство Чебышева, неравенство Мюрхеда, неравенство Караматы, неравенство Гельдера, неравенство Йенсена, неравенство Шура, в современной литературе можно найти множество специальных подборок задач из различных олимпиад, показывающих различные применения этих неравенств (см., например, [13], стр.15-96, [9], стр. 9-132). Также существуют специальные методики, которые должны помогать учащимся догадаться до необходимой комбинации классических неравенств. Например, есть, так называемый, метод баланса коэффициентов, который используется для применения неравенства Коши, неравенства Коши-Шварца, неравенства Гельдера (подробнее об этом методе см. [13], стр. 97-106). Но несмотря на все это, факты не в пользу указанных методик.

В всязи с этим нами предлагается новый метод доказательства неравенств: метод отделяющих касательных. Указанное название впервые было предложено 28 мая 2013 года после совместного доклада И.Ж. Ибатулина и А.Н.Лепеса «Об одном методе доказательства неравенств» на XXI Международной конференции “Математика. Образование” в городе Чебоксары.

На основе анализа 731 доказательств неравенств из двух книг можно констатировать следующее

в книге [13] из 246 неравенств подходящего типа являются 48, из которых с помощью наших рекомендаций можно доказать 31 неравенство;

в книге [9] из 485 неравенств, походящего типа являются 101, из которых с помощью наших рекомендаций можно доказать 74 неравенства.

В общем нами собрано около 100 неравенств из различных олимпиад, которые доказаны с помощью предлагаемого метода, в настоящем проекте представлено 44 неравенства. Планируется издание сборника «Альтернативные доказательства 100 олимпиадных неравенств: метод отделяющих касательных» Предполагаемые доказательства неравенств, на наш взгляд, существенно лучше имееющихся официальных доказательств тем, что требуется больше исследовательских навыков, чем творческого подхода. Основную идею метода отделющих касательных можно описать в следующем виде:

если требуется доказать неравенство вида $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq 0$, где $x_k \in E$, $k=1, 2, \ldots, n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, E – область определения функции f, то необходимо сначала построить график функции f, далее выбрать касательную в соответствии с нашей таблицей рекомендаций, пусть на множестве $G \subset E$ график функции f лежит не ниже выбранной касательной, а для множества $E\backslash G$ выполнено следующее $\min\limits_{x \in E\backslash G} f(x) \geq -(n-1)\min\limits_{E} f(x)$, то применив полученные неравенства между функциями и их касательными, доказать требуемое неравенство.

Если в неравенстве участвуют несколько различных функций, то точки касания выбираются таким образом, чтобы производных данных функций в этих точках соответственно совпадали.

Есть также несколько решений задач в различных статьях и книгах (помимо ранее указанных см., например, [5], [7], [11], [14]), в которых прослеживаются схожие идеи: в книге [13] – 10 задач, [9] – 0 задач, [11] – 3 задачи, [14] – 3 задачи, [5] – 0 задач. Однако в указанных книгах имеются свыше 25 задач, в которых с помощью классических неравенств на некотором шаге получены касательные к графикам соответствующих функций. При этом можно сказать, что указанные касательные получены случайным образом, поскольку при доказательстве не указывалось о необходимости поиска таких касательных. Также необходимо отметить, что метод отделяющих касательных можно отнести к еще одному обобщению метода отделяющих констант, описанию применения которого для решения уравнений в книге [7] посвящена глава. Однако в книге [7] нет описания способов построения касательных. Тем самым, системно к изучению вопроса о построении касательных для доказательства неравенств впервые была предпринята попытка в данном проекте.

Также нами проведено исследование класса функций, для которых справедливо неравенство Йенсена. Показано, что основным условием для выполнения неравенства Йенсена в некоторой заданной точке x_0 как для выпуклых функций, так и для невыпуклых, является расположение графика функции по одну сторону соответственно от касательной прямой, проведенной в точке x_0. Тем самым, среди олимпиадных неравенств найдено несколько десятков невыпуклых функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена, и в каждой из книг [9] и [14] было выявлено одно неверное доказательство неравенства. Данные ошибки носят принципиальный характер и не могут быть устранены исправлением соответствующих коэффициентов.

Глава 1. Метод отделяющих касательных

1. Постановка задачи

Неравенство Йенсена

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n}\right)$$

имеет множество различных применений, достаточно часто оно используется для доказательств неравенств на Международных математических олимпиадах. Необходимо при этом отметить, что неравенство Йенсена в официальных решениях и в статьях в основном упоминается для выпуклых всюду функций, а на самих олимпиадах неравенство Йенсена встречается как для выпуклых, так и для не выпуклых функций. В связи с этим естественно потавить вопрос: для каких функций неравенство Йенсена справедливо в заданной точке x_0, т.е.

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf(x_0),$$

где $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_0$? Традиционным ответом на указанный вопрос является выпуклые вниз функций. Однако различные примеры неравенств на международных олимпиадах показывают, что данный ответ является далеко не полным. Поэтому одной из целью настоящего проекта является найти некоторые достаточные условия на функции, обеспечивающие выполнение неравенства Йенсена в заданной точке x_0. Это попутно приводит к необходимости изучить спектр неравенств, которые так или иначе связаны с неравенством Йенсена. Проведя классификацию таких неравенств и анализ количества учащихся, которые доказали данные неравенства на олимпиаде, можно с одной сторон прийти к выводу о том, что в среднем более половины учащихся не могут доказать соответствующее неравенство на олимпиаде, с другой стороны все такие неравенства является вида

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf(x_0)$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Поэтому возникает необходимость разработать метод доказательства неравенств указанного типа, которые наиболее часто встречаются на олимпиадах.

2. Обоснование задачи.

В книге [2] представлено 6 различных доказательств неравенства из Санкт-Петербургской математической олимпиады 2011 года:

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{4}{5}.$$

В первом доказательстве ключевым моментом является доказательство вспомогательного неравенства $\frac{x}{x^3+4} \leq \frac{2x+3}{25}$, при этом не указано откуда было получено $\frac{2x+3}{25}$ и какова связь между функциями $f(x) = \frac{x}{x^3+4}$ и $g(x) = \frac{2x+3}{25}$, причем при доказательстве неравенства $2x^4 + 3x^3 - 17x + 12 \geq 0$ использовалось неравенство Юнга. В решениях №4 и №5 ключевым моментом было применение неравенства Йенсена, однако поскольку функция f является невыпуклой на [0;4], то в решение №4 путем замены переменных получали неравенство, в котором все переменные не превосходят $\sqrt[3]{2}$, в решении №5 рассматривается 2 случая: 1) $a, b, c, d \in [0; 2]$, 2) большее из чисел a, b, c, d не принадлежит [0; 2]. Неравенство Йенсена использовалось только в первом случае. Таким образом, можно отметить, что автором этих решений было не известно, что для обеспечения неравенства Йенсена необходимо, чтобы график функции лежал по одну сторону соответственно от касательной. То есть для этого **не обязательно**, чтобы функция была выпукла. А также, что $g(x) = \frac{2x+3}{25}$ является касательной к графику функции f, иначе они бы тогда знали, что x_0=1 будет корнем второй кратности многочлена в эквивалентном неравенстве, а значит, нет необходимости применять неравенство Юнга. В решении №2 использовались неравенство Коши и неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим. Интересным является то, что с помощью неравенство Коши было получено вспомогательное неравенство, которое отличалось от ключевого неравенства решения №1, однако там также была касательная и об этом не было указано. В решении №3 использовалось неравенство Чебышева. И наконец, в решение №6 использовался метод, описанный в книге [13], в котором неравенство Йенсена от четырех переменных сводилось к неравенству Йенсена от двух переменных. Тем самым, можно констатировать, что авторами решений №1-6 неравенство Йенсена применяется только для выпуклых функций, в связи с чем и появляется необходимость в особых ухищрений для доказательства применимости неравенства Йенсена, поскольку.

Подобное можно встретить и в других источниках. И вроде бы здесь нет ничего плохого, что неравенство Йенсена применяется только для выпуклых функций и не исследуются класс функций, для которых оно справедливо. Каждый год необходимые неравенства доказываются и без подобного исследования. При этом необходимо спросить зачем изобретать решения типа №1, 4, 5, если неравенство Йенсена оказывается для указанной функции справедливо на всей области определения?

Без анализа функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена, могут появляться ошибки. Например, в книге Ercole Suppa ошибочно указано, что функция $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ является выпуклой на [0; 1] (см. [14], стр. 19). Действительно, поскольку вторая производная функции f на промежутке (0;1) принимает как положительные так и отрицательные значения: $f''(0{,}1) = 5{,}82$, $f''(0{,}9) = -77{,}22$, то функция f не является выпуклой на [0; 1]. Интересно отметить, что неравенство Йенсена для этой функции выполнено, т.е. она является примером невыпуклой функции для которой выполнено неравенство Йенсена в точке $\frac{1}{3}$.

Отсутствие общих рекомендаций для доказательства неравенств, не требующих нестандартных преобразований, естественно сказывается на проценте учащихся, которые могут доказать соответствующее неравенство на олимпиаде. Более половины участников обычно не могут доказать необходимо неравенство.

Да и как им научиться доказывать, если, обращаясь к официально опубликованным решениям задач, мы можем увидеть, что в почти в каждом из них нет объяснений почему те или иные коэффициенты взяты соответствующим образом, решения строятся по принципу «победителей не судят». То есть выбираются из неоткуда коэффициенты или даже появляется вспомогательное неравенство, которое на первый взгляд не связано с необходимым неравенством. Позже, конечно, при доказательстве можно убедиться, что оказывается, ранее выбранные коэффициенты выбраны не случайно, и далее становится ясно, какую роль они играют. Понятно, как появляются такие доказательства неравенств, это довольно типичный прием в математике.

В всязи с этим резонно поставить вопрос, может необходим еще один метод доказательства неравенств, которому более реально обучить учеников? Именно это и является одной из целей настоящего проекта.

В общем нами собрано около 80 неравенств из различных олимпиад, которые доказаны с помощью разработанного нами метода отделяющих касательных, в настоящем проекте предтставлено 44 неравенства. Предполагаемые доказательства неравенств, на наш взгляд, существенно лучше имееющихся официальных доказательств тем, что требуется больше исследовательских навыков, чем творческого подхода. Причиной низкого процента учащихся, которые могут доказать необходимое неравенство на олимпиаде, возможно является необходимость создание нестандарных преобразаваний для применения классических неравенств. В предлагаемом же в методе требуется исследовать функцию, участвующую в неравенстве. И в соответвии с нашими рекомендациями выбирать касательную. Также подтверждением актуальности данной тематики может служить опубликование четырех статей, наличие еще двух статей, которые в данный момент находятся на рассмотрении журналов, и то, что 28 мая 2013 года на XXI Международной конференции “Математика. Образование” в городе Чебоксары был сделан доклад «Об одном методе доказательства неравенств», на котором были рассмотрены основные положения предлагаемого метода. На докладе присутствовал автор книги [7], И.И.Чучаев, декан факультета Математики и информационных технологий Мордовкского государственного универститета, заведующий кафедры математического анализа. Необходимо отметить, что предлагаемый метод можно отнести еще к одному обобщению метода отделяющих констант, применению которого для решения уравнений в книге И.И. Чучаева посвящена глава. После доклада было предложено название для нашего метода: метод отделяющих касательных. Это название было одобрено И.И.Чучаевым.

3. Гипотеза

Рассматриваются класс функции для которых справедливо неравенство Йенсена в некоторой фиксированной x_0. Основой гипотезой является то, что неравенство Йенсена справедливо не только для выпуклых функции, но, и что существенно важно, оно справедливо для функции следующего типа:

1. все функции, графики которых лежат по одну сторону от касательной прямой, проведенной к ним в точке x_0.
2. все функции, графики которых лежат по одну сторону от касательной (прямая, парабола, лограифмическая функция) при наличии дополнительных ограничений на переменные таких как: все переменые положительны и фиксирована сумма переменных, или фиксированна сумма квадратов переменных, или фиксирована произведение переменных.
3. все функции, графики которых на некоторой части области определения лежат по одну сторону от соответствующей касательной (прямой, параболы, логарифмической функции), а на оставшиеся части области определения функция принимают достаточные большие значения.

4. Цель

Целью проекта является разработка универсального метода доказательств неравенств вида $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\geq A$ при дополнительных ограничениях на переменные, которые наиболее часто встречается на Международных Математических олимпиадах. Также целью проекта является изучение класса функций для которых справедливо неравенство Йенсена при дополнительных ограничениях на переменных, и максимально возможное полное описание таких функций.

5. Объект

Объектом являются функции, для которых выполнено неравенство Йенсена в некоторой точке, а также неравенства из Международных Математических олимпиад таких как [15] и неравенства, которые встречается в наиболее в популярных книгах для подготовки олимпиады.

6. Библиографический обзор

Сегодня можно найти множество шикарных подборок задач на доказательство неравенств от простых до сложных. Так в книгах [9], [13] имеется более 700 неравенств, разбитых на более 30 глав. Причем, например, в книге [13] (стр. 97-106) упоминается также, метод баланса коэффициентов, который используется для применения неравенства Коши, неравенства Коши-Шварца, неравенства Гельдера.

Предлагаемый нами метод доказательства неравенств можно отнести к еще одному обобщению метода отделяющих констант (подробнее об этом методе для решения уравнений см. [7]). Есть также несколько решений задач в различных статьях и книгах (помимо ранее указанных см., например, [5], [10], [11], [12], [14]), в которых прослеживаются схожие идеи. При этом необходимо отметить, что почти во всех решениях, в которых встречаются касательные, не указывается как находить эти касательные. Во многих решениях нет даже упоминания о том, что на некотором шаге была получена касательная к некоторой функции. Обычно они получаются в результате применений в некоторой комбинации классических неравенств и их получение не является целью этих комбинаций. Из всех указанных источников наиболее близко к рассуждениям указанным в нашем методе приблизился Pham Kim. В случае симметричных неравенств вида $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq 0$ при условии на переменные

1) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$,
2) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n$,
3) $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$,

в книге [1] на стр. 136 указано о необходимости выбора вспомогательной функции $g(x)$ в виде

1) $k(x\text{-}1)$,
2) $k(x^2\text{-}1)$,
3) $klnx$

соответственно. О числе k сказано только, что $f'(1)\text{-}g'(1)=0$. Однако нет объяснений почему необходимо так выбирать число k. Данная техника называется «симметрическое отделение». В книге [13] нет также примеров для случая $g(x)=k(x^2\text{-}1)$.

Из 246 задач описанные рекомендации Pham Kim Hung используются только для 10 сложных задач, из которых в шести задачах произведение переменных равно 1, в остальных задачах сумма переменных равна 7, 4, 4 и 4 соответственно. При этом в 9 других задачах из книги [13], в решении которых встречается касательная, используются только классические неравенства.

Таким образом, у Pham Kim Hung нет упоминания о связи функций f и g, то есть не указывается, что функция g должна быть касательной к графику функции f и нет упоминания о том, что выбор коэффициента k может быть осуществлен через равенство производных функций f и g в точке касания. Не удивительно, что рекомендации Pham Kim Hung не нашли достаточного применения хотя бы в его книге. Их можно больше отнести к методу вспомогательного неравенства. Решение же трех задач в статье [11] полностью соответствует нашему методу и что самое главное Li K. в начале каждого решения указывает о необходимости нахождения уравнения касательной к графику соответствующей функции. Но чтобы это назвать методом – трех задач недостаточно.

Также необходимо упомянуть о статье Гаврилова ([3]). В этой статье автор доказывает эквивалентность двух определений выпуклых функций: одно через секущую, другое через касательную. Автор рассматривает функции, графики которых лежат по одну сторону от касательной, проведенной в любой точке графика функции. Это и понятно, потому что только такие функции будут выпуклы на всей области определения. Однако если бы автор отошел от требования в каждой точке, а рассмотрел бы функции, графики которых лежат по одну сторону только в некоторых точках, то он бы потерял выпуклость, но ответил на главный вопрос: что есть особенного у выпуклых функций, обеспечивающее выполнение неравенства Йенсена в заданной точке. Именно это и является ключевым моментом нашего проекта, позволяющим существенно расширить класс функций, для которых применимо неравенство Йенсена в заданной точке. И именно это и оказывается необходимым в 14% неравенств (70% от 20%), которые встречаются на математических олимпиадах.

Таким образом, частички идеи настоящего проекта встречаются в различных источниках, только у одного (Pham Kim Hung) оно используется для 10 сложных задач, у другого (Гаврилов В.И.) проведено теоретическое исследование, однако только для выпуклых функций и без применения для доказательства неравенств. А у большинства, если и касательная встречается в решении, то обычно такая касательная является прямой, она появляется в результате нестандартной комбинации классических неравенств, до такой комбинации более половины участников олимпиады догадаться не могут, и получение касательной не является целью решения. Есть, конечно, незначительное количество доказательств неравенств, в которых авторы изначально объявляют о необходимости построения касательное. Но чтобы это назвать методом, у этих авторов недостаточно задач, а некоторые еще и умудряются делать неправильные решения. В связи с этим можно с уверенностью сказать, что попытка создания общего метода для доказательства неравенств с помощью касательной, охватывающего более половины возможных случаев, была впервые предпринята только в этом проекте. Чему подтверждением, является одобрение, полученное от Чучаева И.И. и других участников XXI Международной конференции “Математика. Образование” в городе Чебоксары. А также опубликование в трудах этой конференции статьи, объема 16 страниц.

7. Методология

В Проекте используются классические теоремы дифференциального исчисления, входящие в школьную программу, а также схема исследования на нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции. Построение касательной прямой осуществляется по стандартным формулам, коэффициенты вычисляются с помощью производных.

Выбор типа касательной определяется в соответсвии с условием на переменные и особенностью графика функции:

1. если сумма переменных постоянна, то касательной является прямая или степенная функция;
2. если сумма квадратов переменных постоянна, то касательной является прямая или квадратичная функция;
3. если сумма некоторых степенней переменных постоянна, то касательной является степенная функция или прямая;
4. если произведение переменных постоянно, то касательной является прямая или логарифмическая функция.

Конечно, трудно все уложить в жесткие рамки, иногда и в случае, когда постоянна сумма переменных, касательной является квадратичная функция, а бывает даже и разрывная. Выше приведено только упоминание о наиболее часто используемых касательных.

Название проекта «Метод отделяющих касательных» во многом обусловлено не только попыткой построения касательной в виде прямой, параболы, логарифмической функций соответсвенно, но и тем, что коэффициенты таких касательных вычисляется с помощью производных, тем самым, к ним накладывается условие: в точке касания они должны иметь тот же коэффициент наклона касательной прямой, что и график исследуемой функции. Т.е. чтобы в некоторой окрестности точки касания график функции и соответсвующей касательной разделялись касательной прямой, хотя это не является обязательным требованием. Однако в некоторых случаях именно так и происходит. Это имеет наглядную интерпритацию, в связи с этим к каждому доказательству неравенства в настоящем проекте привед соответсвующий график.

8. Статистика

В главе 3 представлены решения 44 задач, которые либо опубликованы авторами настоящего проекта, либо находятся на рассмотрении журналов. Для того, чтобы можно было оценить преимущества и недостатки предлагаемого метода отделяющих касательных в данном параграфе представлены некоторые статистически данные.

В таблице сравнений № 1 указаны источники, из которых взяты задачи, а также классические методы, неравенства, которые используются в опубликованных доказательствах этих неравенств. Чтобы подчеркнуть сложность составления нестандартного преобразования, которое является необходимым для использования классических неравенств, в таблице сравнений №1 помимо процента учащихся, которые доказали соответствующее неравенство на олимпиаде, представлено необходимое нестандартное преобразование.

В таблице сравнений №2 представлено количество доказательств различных авторов, которые полностью соответствуют методу отделяющих касательных.

В дальнейшем мы будем пользоваться некоторыми общепринятыми сокращениями:

AM-GM – неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим нескольких положительных чисел;

AM-HM – неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим нескольких положительных чисел;

МВПК – метод вспомогательного неравенства, т.е. для доказательства неравенства используют некоторое неравенство без объяснения причин его возникновения, либо такое неравенство может быть получено с помощью классических приемов;

МВПК – метод выделения полного квадрата;

МОК – метод отделяющих касательных.

Также необходимо отметить, что если в таблице сравнений №1 напротив неравенства в предпоследнем столбце указано слово «схоже», то это означает, что в доказательстве, предлагаемом в настоящем проекте получают такое же вспомогательное неравенство, как и в опубликованном, однако другим способом. Если же указано слово «новое» - доказательство такого неравенства существенно отличается от опубликованного ранее.

Таблица сравнений №1

Номер примера	Является ли функция выпуклой?	Источник опубликованного решения	Классические методы, неравенства и необходимые нестандартные преобразования, ключевые вспомогательные неравенства	Сравнение с решение предложенным в Проекте	Процент учащихся, которые доказали
1	нет	[16]	AM-GM, AM-HM, $a^3+8=a^3+1+1+6\geq 3\sqrt[3]{a\cdot 1\cdot 1}=3a$	схоже	55
2	нет	[1], стр. 47	монотонность функции $f(x)$=$cosx$	**новое**	
3	нет	[9], стр. 18,	AM-GM,	схоже	

		упр.2.16	$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$		
4	нет	[1], стр. 93	AM-HM, разбиение на пары	**новое**	
5	нет	[9], стр. 47, упр.4.20, [13], стр. 55, упр. 3.1.5	неравенство Чебышева	**новое**	
6	нет	[9], стр. 185, задача 20	МВН, $$\frac{1}{1+a^2} \geq \frac{27}{50}(2-a)$$	схоже	
7	нет	[9], стр. 197, задача 138	AM-GM, $$(k-1)a^k + 1 = a^k + a^k + \ldots + a^k + 1 \geq k\sqrt[k]{a^{k(k-1)}},$$ $$a^{k-1} + (k-2) = a^{k-1} + 1 + 1 + \cdots + 1 \geq$$ $$\geq (k-1)\sqrt[k-1]{a^{k-1}}$$	**новое**	
8	да	[9], стр. 55, упр.5.9	AM-GM, AM-HM, $$a+b+c+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c} = \left(a+b+c+\tfrac{1}{4a}+\tfrac{1}{4b}+\tfrac{1}{4c}\right) +$$ $$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$	**новое**	
9	нет	[17]	МВПК	схоже	76
10	нет	[11], стр. 187	МВН $4a^3+1 \geq 3a$	**новое**	
11	нет	[9], стр. 185, задача 25	МВН $$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$	схоже	
12	да	[9], стр. 56, упр.5.11	AM-GM, $$p+q = p + \frac{1}{9}q + \frac{8}{9}q$$	**новое**	
13	нет	[9], стр. 194, задача 110	AM-GM, $$\frac{1}{a^3+2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^3}{a^3+1+1}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^3}{3a}\right)$$	схоже	
14	да	[10], стр. 29, [12], стр.34,	неравенство Йенсена, метод отделяющих констант, неравенство Коши-Щварца	**новое**	
15	да	[9], стр. 200, задача 162, [13], стр. 165, задача 29	решение №1: неравенство Коши-Шварца, $$\frac{1}{2-a} = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2(2a-a^2)}.$$ решение №2: неравенство Коши-Шварца, $$\frac{1}{2-a} = \frac{1}{2} + \frac{a^4}{2a^3-a^4}.$$ Решение №3: AM-GM, $$\frac{1}{2-a} = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2a(2-a)} \geq \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}.$$	схоже	
16	да	[9], стр. 64, упр.6.7	транснеравенство	**новое**	
17	нет	[9], стр. 189, задача 63	решение не верно	**новое**	
18	да	[9], стр.	МВПК	**новое**	

		183, задача 3			
19	нет	[9], стр. 208, задача 236	неравенство Мак Лаурина, AM-HM	**новое**	
20	нет	[9], стр. 202, задача 185	неравенство Чебышева	**новое**	
21	нет	[13], стр. 135, упр. 8.4.1	МОК	схоже	
22	нет	[9], стр. 188, задача 56	AM-GM, $\frac{a}{a^2+2}=\frac{a}{a^2+1+1}\leq\frac{a}{2a+1}$	**новое**	25
23	нет	[9], стр. 196, задача 132, [14], стр. 18, задача 16	решение №1: AM-GM, решение №2: не верно	**новое**	
24	да	[15]	AM-GM, $a^k+1=a^k+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-1}+\ldots+\frac{1}{k-1}$	схоже	
25	да	[9], стр. 187, задача 37	AM-GM, $a+\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{4}+\frac{1}{a+1}+\frac{3a}{4}+\frac{3}{4}\geq$ $\geq 2\sqrt{\frac{a+1}{4}\cdot\frac{1}{a+1}}+2\sqrt{\frac{3a}{4}\cdot\frac{3}{4}}=1+\frac{3}{2}\sqrt{a}$	схоже	
26	да	[9], стр. 41, упр.4.9	неравенство Коши-Шварца	**новое**	
27	да	[9], стр. 45, упр.4.15	неравенство Минковского, AM-GM,	**новое**	
28	да	[9], стр. 39, упр.4.4	неравенство Коши-Шварца	**новое**	
29	да	[13], стр. 100, упр. 6.1.3	метод баланса коэффициентов, AM-GM	**новое**	
30	да	[13], стр. 103, упр. 6.2.1	метод баланса коэффициентов, AM-GM	**новое**	
31	да	[9], стр. 195, задача 120	AM-GM, $a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}=\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)+$ $+\frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\geq\frac{3}{2}\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}+\sqrt{b\cdot\frac{9}{b}}+\frac{1}{2}\sqrt{c\cdot\frac{16}{c}}=8$	**новое**	
32	да	[9], стр. 39, упр.4.3, [11], стр. 172	неравенство Коши-Шварца	**новое**	

33	да	[9], стр. 39, упр.4.5	неравенство Коши-Шварца	**новое**	
34	нет	[9], стр. 196, задача 130	МВН	схоже	
35	да	[9], стр. 110, задача 3.78	неравенство Мюрхеда	**новое**	
36	да	[10], стр.108, задача 3.59	неравенство Мюрхеда	**новое**	
37	нет	[13], стр. 130, упр. 8.3.3	МВН, $\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2}\leq 1+\frac{8a+6}{2}$	схоже	
38	нет	[9], стр. 203, задача 197, [13], стр. 55, упр. 3.1.4	неравенство Чебышева	**новое**	
39	нет	[13], стр. 49, упр. 2.2.4, [9], стр. 196, задача 126	МВН, неравенство Гельдера, $a^5-a^2+3=a^3+2+(a^3-1)(a^2-1)\geq a^3+2$	схоже	
40	да	[9], стр. 189, задача 65	МВН, $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\geq\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$	схоже	
41	да	[9], стр. 42, упр.4.11	неравенство Коши-Шварца, AM-GM	схоже	
42	да	[13], стр. 37, упр. 2.1.5	неравенство Коши-Шварца, AM-GM	схоже	
43	да	[18]	МВН	схоже	64
44	да	[6], стр.169	МВН $\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\geq\frac{1-(a+b)}{1+(a+b)}$	**новое**	

№	Источник	Касательная прямая	Касательная: парабола	Касательная: степенная функция	Касательная: логарифмическая	Произведение значений функций	Фиксация суммы переменных	Несколько различных функций	Однородные неравенства	Нестандартные касательные	Комбинирование различных приемов	Секущие	всего
1	Проект	12	5	3	3	2	2	7	3	1	4	2	44
2	книга [9]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	книга [13]	3	0	0	6	0	0	0	0	0	1	0	10
4	статья [11]	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
5	книга [14]	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

Таблица сравнений №2

Глава 2. Теоретическая часть

1. Касательная

В школьной программе математики есть определение касательной прямой (см. [8], стр. 99-100), как предельное положение секущей. И необходимо отметить, что всякая касательная прямая обладает одним важным свойством: если функция дважды непрерывно-дифференцируема и её вторая производная в точке x_0 отлична от нуля, то существует окрестность точки x_0, в которой график функции лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в точке x_0. Это объясняется тем, что если, например, вторая производная функции в точке x_0 положительна, то в силу непрерывности второй производной существует окрестность точки x_0, в которой вторая производная положительна, что означает, что функция выпукла вниз. Следовательно, график такой функции лежит не ниже отрезка касательной в некоторой окрестности точки x_0.

Большинство функций, встречающиеся в олимпиадных неравенствах обладают указанным свойством. При этом некоторые функции как выпуклые, так и не выпуклые, лежат по одну сторону от касательной прямой на всей области определения, а некоторые хоть и не лежат по одну сторону от касательной прямой, но также удовлетворяют неравенству Йенсена.

Однако, необходимо отметить, что примеры функций $f_1(x) = x^4$ и $f_2(x) = x^3$ показывают, что в случае, когда вторая производная в точке $x_0=0$ совпадает с 0, график функции может как лежать по одну сторону от касательной, так и не лежать.

И что самое интересное, здесь важным условием обеспечивающим выполнение неравенства Йенсена в некоторой точке является условие расположения графика функций по одну сторону от кривой, которая определяется из условия на переменные, вне зависимости выпукла ли функция или нет. В связи с этим предлагается расширить определение касательной прямой следующим образом.

Определение 1. Пусть дана числовая функция f, определенная на некотором промежутке I. Функция g: $I \to R$ называется касательной к графику f в точке $x_0 \in I$, если $f(x_0)=g(x_0)$ и существует $\delta>0$ такое, что выполнено одно из следующих условий

1) для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$;

2) для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$.

Заметим, что в силу вышесказанного если функция дважды непрерывно дифференцируема и вторая производная функции f в точке x_0 отлична от 0, то касательная прямая удовлетворяет определению 1. В общем случае сложно сказать, когда касательная прямая удовлетворяет определению 1. Тем более пример касательной прямой для функции $f_2(x) = x^3$ в точке касания $x_0=0$ показывает, касательная прямая может и не удовлетворять определению 1.

Естественно возникает вопрос, как находить касательные к графикам функций? И здесь необходимо отметить, что в отличие от касательной прямой у функции в точке может быть проведено бесконечно много касательных. Поэтому при выборе касательной необходимо учитывать условие при которых требуется доказать неравенство, а точку касания брать таким образом, что в этой точке неравенство обращается в равенство. В следующей теореме мы рассмотрим еще отличительное свойство касательной прямой, для этого на понадобиться определение эквивалентных функций.

Определение 2. Пусть даны две числовые функции f_1 и f_2, областью определения которых является некоторое числовое множество E. Функции f_1 и f_2 называются эквивалентными, если выполнено следующее

1. $\{x \in E: f_1(x) > 0\} = \{x \in E: f_2(x) > 0\}$;

2. $\{x \in E: f_1(x) < 0\} = \{x \in E: f_2(x) < 0\}$.

Чтобы научиться строить необходимые касательные желательно, сначала понять какие еще особые свойства есть у касательной прямой, для того, чтобы попытаться сохранить эти свойства у касательных. В дальнейшим мы будем рассматривать только функции, областью определения которых являются промежутки не нулевой длины. Справедлива

Теорема 1. *Пусть даны многочлены P, Q и g, промежуток I, точка $x_0 \in I$. Пусть также для всякого $x \in I$ выполнено неравенство $Q(x)>0$ и $g(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. Если существует $\delta>0$ такое, что для всякого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$, где $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, то $f'(x_0) = g'(x_0)$.*

Доказательство. Предположим, что $g'(x_0) \neq f'(x_0) = \frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{Q^2(x_0)}$. Пусть для определенности, не теряя общности, $g'(x_0) > f'(x_0)$. Согласно формуле Тейлора всякий многочлен представим в следующем виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0),$$

где n – степень многочлена P, $P^{(k)}(x_0)$ – k-ая производная многочлена P *в* точке x_0. Отсюда, многочлены P, Q, g можно записать в виде

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + P_1(x)(x - x_0)^2,$$

$$Q(x) = Q(x_0) + Q'(x_0)(x - x_0) + Q_1(x)(x - x_0)^2,$$

$$g(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} + g_1(x)(x - x_0),$$

где P_1, Q_1, g– многочлены. Следовательно,

$$f(x) - g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} - g_1(x)(x - x_0) =$$

$$= \frac{(x - x_0)\big(P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0) - g_1(x)Q(x)Q(x_0) + (x - x_0)(P_1(x)Q(x_0) - P(x_0)Q_1(x_0)\big)}{Q(x)Q(x_0)}. \quad (1)$$

Заметим, что функция

$$M(x) = P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0) - g_1(x)Q(x)Q(x_0) + (x - x_0)(P_1(x)Q(x_0) - P(x_0)Q_1(x_0)$$

является многочленом и $M(x_0) = Q^2(x_0)\big(f'(x_0) - g_1(x_0)\big) = Q^2(x_0)\big(f'(x_0) - g'(x_0)\big) < 0$. Поскольку, как известно, многочлен является всюду непрерывной функцией, то существует $\varepsilon>0$ такое, что для всякого $x\in(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ выполнено неравенство $M(x)<0$. Следовательно, если $x_0<x<x_0+\varepsilon$, то $f(x)<g(x)$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $f'(x_0) = g'(x_0)$. Тем самым, теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть даны многочлены P, Q и g, промежуток I, точка* $x_0\in I$ *такие, что* $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, *где* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. *Пусть также для всякого* $x\in I$ *выполнено неравенство* $Q(x)>0$. *Тогда функция* $h(x) = f(x) - g(x)$ *эквивалентна функции вида* $(x-x_0)^2T(x)$, *где T – некоторый многочлен.*

Доказательство. Повторяя преобразование выражения $f(x) - g(x)$ при доказательстве теоремы 1 мы получим соотношение (1). Далее заметим, что из равенства $f'(x_0) = g'(x_0)$ следует, что $g_1(x) = f'(x_0) + g_2(x)(x - x_0)$, где g_2 является многочленом. Следовательно,

$$f(x) - g(x) = \frac{(x-x_0)^2\Big[\big(P_1(x)Q(x_0) - P(x_0)Q_1(x)\big) - f'(x_0)Q(x_0)\Big(Q'(x_0) + Q_1(x)(x - x_0)\Big) - g_2(x)Q(x)Q(x_0)\Big]}{Q(x)Q^2(x_0)}.$$

Последнее в силу положительности значений многочлена Q эквивалентно функции

$$(x-x_0)^2T(x), \tag{1}$$

где

$$T(x) = P_1(x)Q(x_0) - P(x_0)Q_1(x) - f'(x_0)Q(x_0)\big(Q'(x_0) + Q_1(x)(x - x_0)\big) - g_2(x)Q(x)Q(x_0).$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть даны два многочлена P и Q, промежуток I, точка* $x_0\in I$. *Пусть также для всякого* $x\in I$ *выполнено неравенство* $Q(x)>0$. *Тогда функция*

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big),$$

где $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *эквивалентна функции вида* $(x-x_0)^2T(x)$, *где T – некоторый многочлен.*

Теорема 3. *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I. Пусть также функция f дифференцируема в точке* $x_0\in I$. *Если для каждого* $x\in I$ *выполнено неравенство*

$$f(x) \geq k \cdot l(x) + m,$$

где $k = \begin{cases} 0, \text{если } l'(x_0) = 0, \\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)}, \text{если } l'(x_0) \neq 0, \end{cases}$ $m = f(x_0) - k \cdot l(x_0)$*, то справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\sum_{j=1}^{n} l(x_j) = n \cdot l(x_0)$.

Доказательство теоремы 3 тривиально: согласно условию теоремы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \left(k \cdot l(x_j) + m\right) = k \sum\nolimits_{j=1}^{n} l(x_j) + mn = n(k \cdot l(x_0) + m) = nf(x_0).$$

Замечание 2. Если $l(x)=x$ и функция f является выпуклой на промежутке I, то график функции лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в любой точке $x_0 \in I$, то есть справедливо неравенство $f(x) \geq kx+m$, где числа k и m определены также как в условии теоремы 3. Следовательно, согласно теореме 3 для всякой выпуклой функции справедливо неравенство Йенсена. Тем самым, можно также утверждать, что неравенство Йенсена справедливо в точке x_0 для всякой функции как выпуклой, так и не выпуклой, график которой лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в точке x_0.

Также необходимо заметить, что в качестве x_0 (точки касания), если не оговорено другое, мы будем брать точку, в которой требуемое неравенство обращается в равенство.

Теорема 3 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 4. *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I, и множество G. Пусть также функция f дифференцируема в точке x_0 и на множествах G и I она достигает своего наименьшего значения. Если*

$$\min_G f + (n-1)\min_I f \geq nf(x_0)$$

и для каждого $x \in I/G$ выполнено неравенство

$$f(x) \geq k \cdot l(x) + m,$$

где $k = \begin{cases} 0, \text{если } l'(x_0) = 0, \\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)}, \text{если } l'(x_0) \neq 0, \end{cases}$ $m = f(x_0) - k \cdot l(x_0)$, $x_0 \in I/G$*, то справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\sum_{j=1}^{n} l(x_j) = n \cdot l(x_0)$.

Доказательство. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I/G$, то, рассуждая также, как и в доказательстве теоремы 3, получим, что $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0)$.

Пусть теперь x_1 не принадлежит множеству I/G, т.е. $x_1 \in G$, тогда согласно определению наименьшего значения функции имеем

$$f(x_1) \geq \min_G f,\ f(x_2) \geq \min_I f,\ f(x_3) \geq \min_I f,\ \ldots,\ f(x_n) \geq \min_I f.$$

Складывая полученные неравенства, согласно условию теоремы получим требуемое.

2. Средние степенные

В дальнейшим мы будем использовать следующее определение.

Определение 3. Пусть положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если число α отлично от нуля, то средним степенным чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если $\alpha=0$, то

$$c_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Справедлива

Теорема 5. *Пусть даны число α, положительное число x_0 и натуральное число $n \geq 2$. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке x_0. Если $(\alpha - 1) \cdot f'(x_0) \leq 0$ и для всякого положительного числа x такого, что $x^\alpha < nx_0^\alpha$ выполнено $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0), \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq 0$. Заметим, что если для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ выполнено $c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_0$, то вне зависимости положительно или нет число α *для* каждого $k=1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство $x_k^\alpha < nx_0^\alpha$. Если же $\alpha=0$, то указанное неравенство также выполнено.

Пусть $\alpha<1$. Тогда $f'(x_0) \geq 0$. Согласно теореме о монотонности средне степенных (см., например, [4], стр. 21) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x_j - x_0)\right) = nf(x_0) + nf'(x_0)(c_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_0) \geq$$

$$\geq nf(x_0) + nf'(x_0)(c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_0) = nf(x_0)$$

Случай $\alpha>1$ аналогичен предыдущему. А случай $\alpha=1$ – тривиален. Тем самым, теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 следует важный практический смысл. Если в условии задачи имеется ограничение, например, на сумму квадратов, то рассматривать в качестве касательной прямую имеет смысл, только если производная соответствующей функции в точке касания отрицательна. Если же, например, произведение переменных постоянно, то производная функции в точке касания должна быть положительна. Подобное можно встретить в примере 36 в третьей главе 3. Если же указанное условие для функции не выполнено, то желательно в качестве касательной брать многочлен той же степени, что и порядок степени переменных в условии задачи. То есть в случае ограничения на сумму квадратов переменных и положительности значений производной функции в точке касания в качестве касательной можно попробовать параболу с абсциссой вершины в точке 0.

В теореме 5 ограничение имеется на сумму некоторых степеней переменных, а в качестве касательная рассматривается прямая. Естественно поставить аналогичный вопрос о целесообразности рассмотрения в качестве касательной некоторую степенную функцию, если ограничение в условии задачи имеется на сумму переменных.

Теорема 6. *Пусть даны число $\alpha\neq 0$, положительное число x_0 и натуральное число $n\geq 2$. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке x_0. Если $(\alpha-1)\cdot f'(x_0)\geq 0$ и для всякого положительного числа x такого, что $x<nx_0$ выполнено $f(x)\geq \frac{f'(x_0)}{\alpha\cdot x_0^{\alpha-1}}(x^\alpha-x_0^\alpha)+f(x_0)$, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\geq nf(x_0), \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n=nx_0$.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

3. Частные случаи

Теорема 7. *Пусть дан многочлен $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$, натуральное число n и положительное число x_0. Пусть даны неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сумма которых равна nx_0. Если $2ax_0+b\geq 0$ и $(n+2)ax_0+b\geq 0$, то справедливо неравенство $\sum_{j=1}^{n} P(x_j)\geq nP(x_0)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2 и равенству (1) функция $P(x)-P(x_0)-P'(x_0)(x-x_0)$ представляется в виде $(x-x_0)^2P_1(x)=(x-x_0)^2(ax+2ax_0+b)$. А поскольку $\sum_{j=1}^{n} P'(x_0)(x_j-x_0)=P'(x_0)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j-nx_0\right)=0$, то неравенство $\sum_{j=1}^{n} P(x_j)\geq nP(x_0)$ эквивалентно следующему

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_0)^2(ax_j+2ax_0+b)\geq 0. \tag{3}$$

Заметим, что из того, что сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна nx_0 следует, что каждое из этих чисел принадлежит промежутку $[0;nx_0]$. Однако в силу монотонности функции $ax+2ax_0+b$ и неотрицательности чисел $2ax_0+b$ и $(n+2)ax_0+b$ для всякого

$x \in [0; nx_0]$ справедливо неравенство $ax + 2ax_0 + b \geq 0$. Последнее означает, что неравенство (3) является верным. Следовательно, теорема 7 доказана.

Замечание 3. Как известно, для того, чтобы многочлен $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ был выпуклым вниз необходимо и достаточно, что $P''(x) = 6ax + 2b > 0$ на всем промежутке $[0; nx_0]$. А для этого необходимо, чтобы $b>0$ и $3nax_0+b>0$. Заметим, что числа a, b, n, x_0 удовлетворяют указанным неравенствам, то они и удовлетворяют неравенствам $2ax_0+b\geq0$ и $(n+2)ax_0+b\geq0$. Что вполне соответствует общеизвестному факту, что неравенство Йенсена выполнено для выпуклых функций. Однако, если числа a, b, n, x_0 удовлетворяют неравенствам $2ax_0+b\geq0$ и $(n+2)ax_0+b\geq0$, то они не обязаны удовлетворять обоим неравенствам $b>0$ и $3nax_0+b>0$. Например, такими числами могут быть $n=3$, $a=1$, $b=-1$, $x_0=1$. То есть любая функция вида $P(x) = x^3 - x^2 + cx + d$ является не выпуклой на отрезке [0; 3], но при этом для нее справедливо неравенство Йенсена в точке $x_0=1$. Ясно, что такой набор чисел n, a, b, x_0 не единственный. Тем самым показано, что существует бесконечно невыпуклых функций, для которых выполнено неравенство Йенсена в заданной точке.

.

4. Описание метода отделяющих касательных

Суть метода отделяющих касательных заключается в подборе типа касательной, ее коэффициентов и точек касания таким образом, чтобы полученные неравенства между функцией и ее касательной были полезны для доказательства необходимого неравенства.

Указанный метод применим только для доказательства неравенств вида

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \geq A$$

или неравенств, которые могут быть приведены к такому виду.

Как ранее было отмечено, из теорем 2 и 3 следует, что в качестве касательной необходимо рассматривать только такие функции, у которых с функцией f_k совпадают значения и значения производной в точке касания.

И здесь необходимо рассмотреть несколько случаев.

1 случай. $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ *и график функции f лежит не ниже касательной.*

a) Если $x_1+x_2+\ldots+x_n=B$, x_1, x_2, ..., $x_n>0$, то в качестве касательной рассматривают прямую. Если же оказывается, что часть касательной прямой лежит выше графика функции f, то в качестве касательной рассматривают степенную функцию. Выбор степенной функции осуществляется в соответствии с условиями теоремы 6. В обоих случаях в качестве точки касания выбирают число $\frac{B}{n}$.

b) Если $\alpha\neq0$ и $x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha = B$, x_1, x_2, ..., $x_n>0$, то в качестве касательной рассматривают функцию вида $g(x) = kx^\alpha + m$, где коэффициенты k и m находят из условий $g(x_0)=f(x_0)$, $g'(x_0)=f'(x_0)$. В качестве точки x_0 рассматривают $\left(\frac{B}{n}\right)^{1/\alpha}$. Если часть выбранной касательной лежит выше графика функции f, то в качестве касательной рассматривают прямую в соответствии с условиями теоремы 5.

c) Если $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = B$, x_1, x_2, ..., $x_n>0$, то в качестве касательной рассматривают функцию вида $k \cdot \ln x + m$, где $k = x_0 \cdot f'(x_0)$, $m = f(x_0) - k \ln x_0$, $x_0 = \sqrt[n]{B}$. Также как в случае 1*b*, если указанная касательная не удовлетворяет необходимым условиям, то при наличие положительной производной функции f в точке x_0 в качестве касательной рассматривают прямую.

d) Если функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является однородной, то неравенство вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$

где x_1, x_2, ..., $x_n>0$, достаточно доказать при $c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Выбор числа α осуществляют в соответствии с условиями теоремы 5. Тип касательной и точки касания производится также как в случае 1*b*.

e) Если функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является однородной **порядка 0**, то неравенство вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq A,$$

где x_1, x_2, ..., $x_n>0$, $A\neq 0$, достаточно доказать при $c_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Выбор числа α осуществляют в соответствии с условиями теоремы 5. Выбор типа касательной и точки касания производится также как в случае 1*b*.

f) Если нет ограничений на переменные или эти ограничения отличаются от выше указанных, то для доказательства неравенства вида $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ для каждого положительного числа S, выбираются положительные числа x_1, x_2, …, x_n, сумма которых равна S. Далее рассуждения строятся аналогично случаю 1*a*, при этом ограничения на S находятся с помощью классических неравенств.

2 случай. Если среди функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ есть различные и необходимо доказать неравенство $\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \geq A$, при условии на переменные $\sum_{j=1}^{n} l(x_j) = B$. Тогда в качестве касательной рассматривают функцию вида $k_j l(x)+m_j$, $k_j = \frac{f_j'\left(x_j^{(0)}\right)}{l'\left(x_j^{(0)}\right)}$, $m_j = f_j\left(x_j^{(0)}\right) - kl\left(x_j^{(0)}\right)$, j=1, 2, …, n, а точки касания $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ находят из следующей системы уравнений

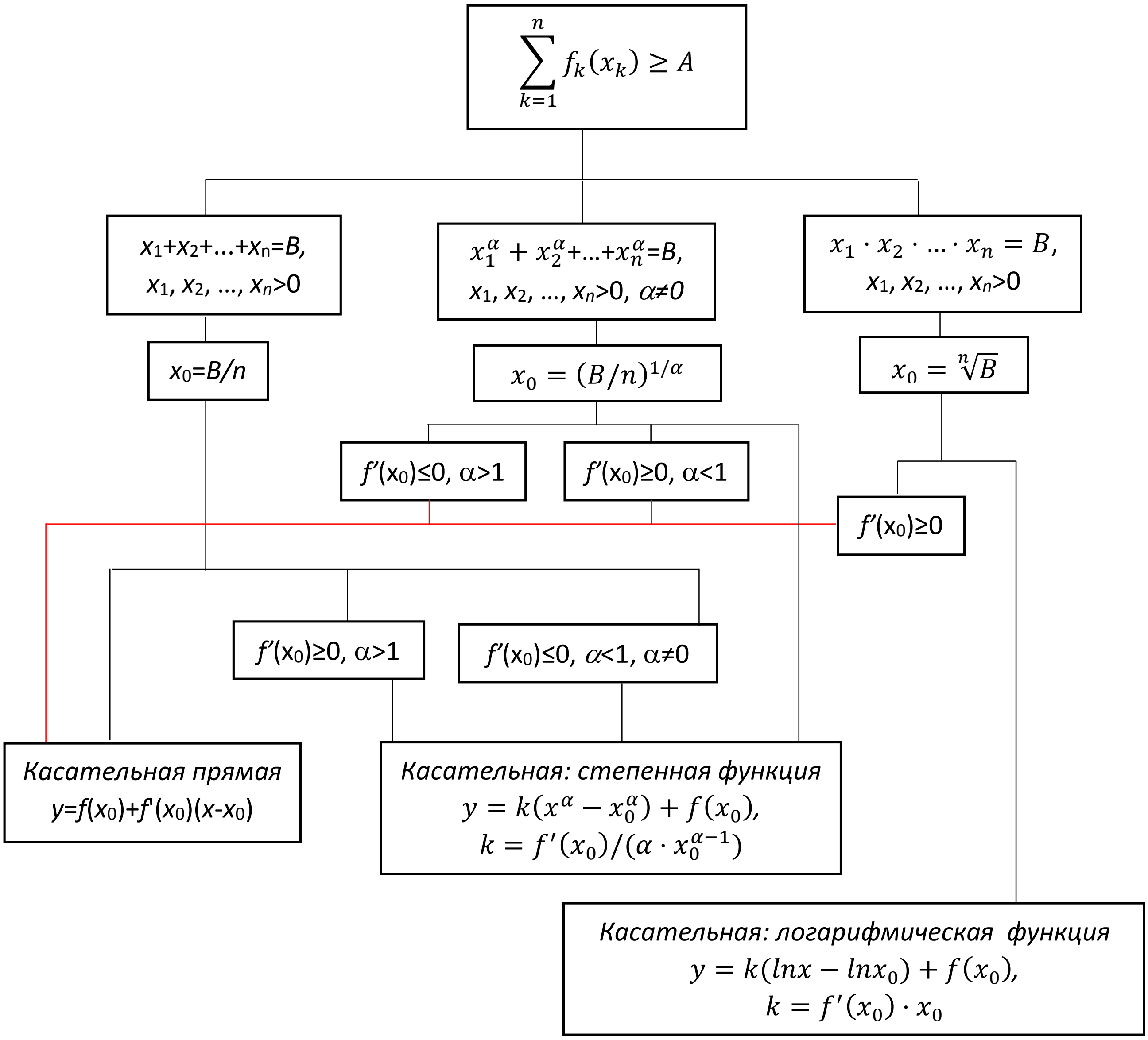
$$\sum_{j=1}^{n} l\left(x_j^{(0)}\right) = B, \frac{f_1'\left(x_1^{(0)}\right)}{l'\left(x_1^{(0)}\right)} = \frac{f_2'\left(x_2^{(0)}\right)}{l'\left(x_2^{(0)}\right)} = \ldots = \frac{f_n'\left(x_n^{(0)}\right)}{l'\left(x_n^{(0)}\right)}. \quad (4)$$

Причем нам достаточно хотя бы одного решения системы (4). В наиболее распространенном случае $l(x)=x$ система уравнений (4) запишется в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(0)} = B, f_1'\left(x_1^{(0)}\right) = f_2'\left(x_2^{(0)}\right) = \ldots = f_n'\left(x_n^{(0)}\right).$$

3 случай. $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ *и график функции* f *лежит по обе стороны от касательной.* В этом случае область определения разбивают на две части, на одной из которых график функции лежит ниже касательной. Дальнейшие рассуждения повторяет доказательство теоремы 4.

Для наглядности случаи 1*a*, *b*, *c* можно представить в виде следующей схемы.


$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \geq A$
$x_1+x_2+\ldots+x_n=B$, $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$
$x_1^\alpha + x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha=B$, $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$, $\alpha\neq 0$
$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = B$, $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$
$x_0=B/n$
$x_0 = (B/n)^{1/\alpha}$
$x_0 = \sqrt[n]{B}$
$f'(x_0)\leq 0$, $\alpha>1$
$f'(x_0)\geq 0$, $\alpha<1$
$f'(x_0)\geq 0$
$f'(x_0)\geq 0$, $\alpha>1$
$f'(x_0)\leq 0$, $\alpha<1$, $\alpha\neq 0$
Касательная прямая
$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
Касательная: степенная функция
$y = k(x^\alpha - x_0^\alpha) + f(x_0)$,
$k = f'(x_0)/(\alpha \cdot x_0^{\alpha-1})$
Касательная: логарифмическая функция
$y = k(\ln x - \ln x_0) + f(x_0)$,
$k = f'(x_0) \cdot x_0$

Глава 3. Применения метода отделяющих констант

1. Простейший случай: касательная прямая

Пример 1. (Baltic way, 2011, задача 4). Пусть даны положительные числа a, b, c, d такие, что a+b+c+d=4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\le\frac{4}{9}.$$

Решение. Заметим, что если a=b=c=d=1, то $\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}=\frac{4}{9}$. Положим $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$, $x\in(0;4)$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке x_0=1:

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(x-1)=\frac{2x+1}{27}.$$

Покажем, что на интервале (0; 4) график функции f лежит не выше касательной $y=\frac{2x+1}{27}$ (см. рис. 1).

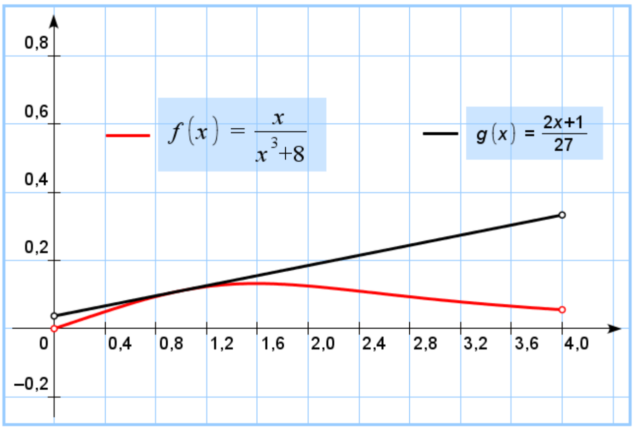


Рис. 1

Действительно, поскольку

$$\frac{x}{x^3+8}\le\frac{2x+1}{27}\Leftrightarrow(x-1)^2(2x^2+5x+8)\ge0, \tag{1}$$

то указанное утверждение верно. Применяя неравенство (1), получим

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\le\frac{2(a+b+c+d)+4}{27}=\frac{4}{9}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. (Всероссийская олимпиада, окружной этап, 2004, 10 класс, задача 1, В.Сендеров). Сумма положительных чисел a, b, c равна π/2. Докажите, что *cosa*+*cosb*+*cosc*>*sina*+*sinb*+*sinc*.

Решение. Положим $f(x)=cosx-sinx$, где $0<x<\frac{\pi}{2}$. Выберем x_0 таким образом, чтобы производная функции f принимала в этой точке наименьшее значение. Очевидно, что в качестве точки x_0 можно взять $\frac{\pi}{4}$. Составим уравнение прямой, проходящую через точку (0; 1), тангенс угла наклона которой совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику функции f в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$y = 1 - x\sqrt{2}.$$

Докажем, что для всякого $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ справедливо неравенство (см. рис. 2)

$$cosx - sinx \geq 1 - x\sqrt{2}. \qquad (2)$$

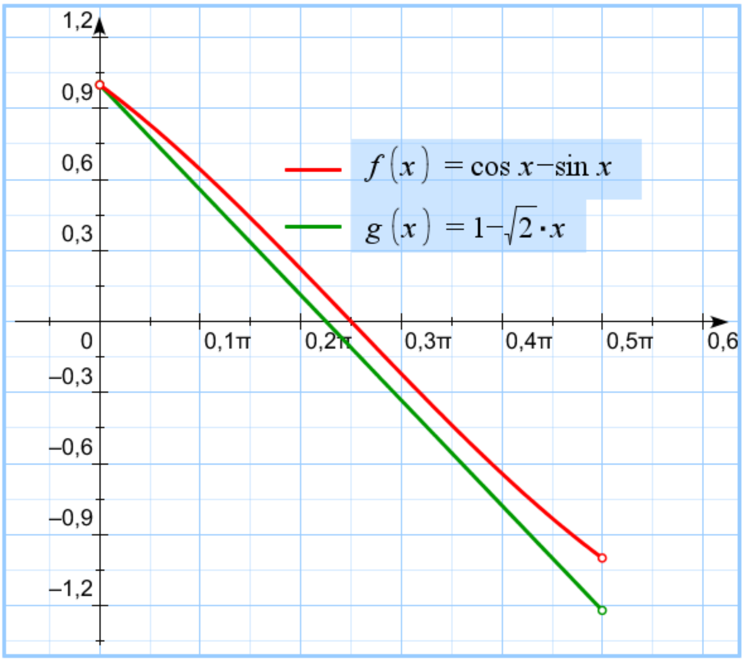


Рис. 2

Рассмотрим функцию $h(x) = cosx - sinx + x\sqrt{2} - 1$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Заметим, что уравнение $h'(x) = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Поэтому в силу дифференцируемости функции h на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$\min_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} h(x) = \min\left\{h(0); h\left(\frac{\pi}{4}\right); h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \min\left\{0; \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1; \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2\right\} = 0.$$

Следовательно, для всякого $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выполнено неравенство (2). Отсюда,

$$cosa + cosb + cosc \geq sina + sinb + sinc + 3 - (a + b + c)\sqrt{2} =$$

$$= sina + sinb + sinc + 3 - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} > sina + sinb + sinc.$$

Замечание 1. И хотя в решении пример 2 мы не использовали ни касательную, ни секущую, читатель может это осуществить соответственно изменив функцию $g(x) = 1 - x\sqrt{2}$. Это возможно, поскольку данное неравенство является завышенным и оно никогда не обращается в равенство.

Пример 3. Пусть даны положительные числа *a, b, c, d* такие, что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

Решение. Положим $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in (0; 4)$. Заметим, что при $a=b=c=d=1$ наше неравенство обращается в равенство. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=1$:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x-1) = \frac{2-x}{2}.$$

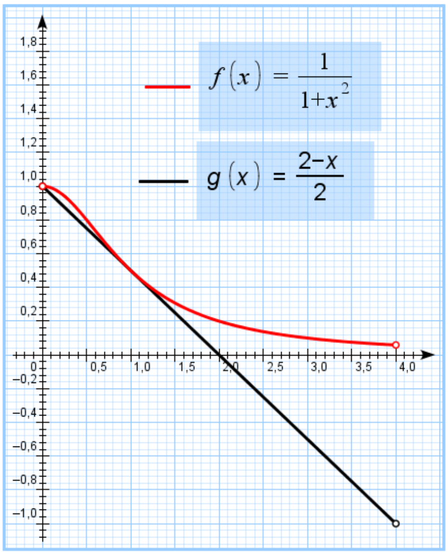


Рис. 3

Докажем, что для любого $x \in (0; 4)$ справедливо неравенство (см. рис.3)

$$\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{2-x}{2}. \qquad (3)$$

Неравенство (3) эквивалентно неравенству $x(x-1)^2 \geq 0$, которое, очевидно, для указанных x верно. Отсюда, согласно условию задачи имеем

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq \frac{8-(a+b+c+d)}{2} = 2.$$

Пример 4. (Всероссийская математическая олимпиада, заключительный этап, 2003, 9 класс, задача 6, С.Берлов). Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Решение. Пусть $f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1+x}$, $x\in(0;\ 1)$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=\frac{1}{3}$:

$$y=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0+\frac{27}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{27}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

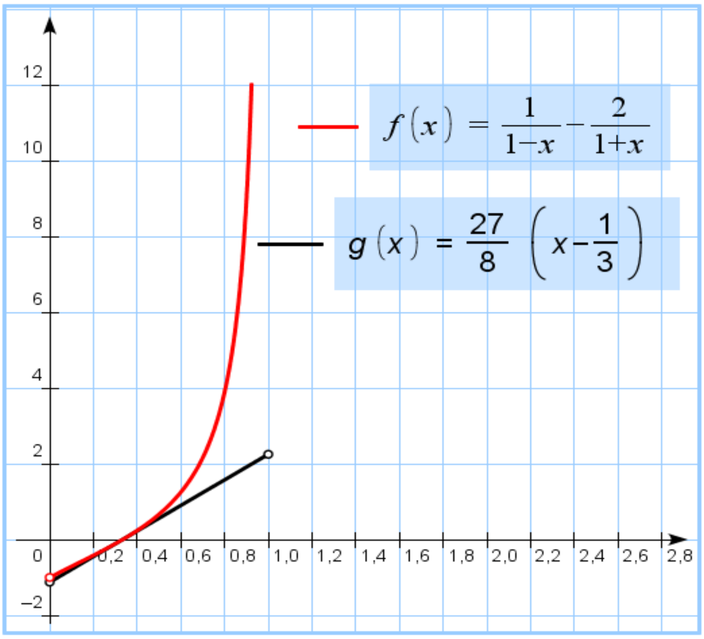


Рис. 4

Поскольку неравенство (см. рис. 4)

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1+x}\geq\frac{27}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

эквивалентно неравенству

$$(3x\text{-}1)^2(3x+1)\geq 0,$$

которое является верным для всякого числа $x\in(0;\ 1)$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{1-a}-\frac{2}{1+a}+\frac{1}{1-b}-\frac{2}{1+b}+\frac{1}{1-c}-\frac{2}{1+c}\geq\frac{27}{8}(a+b+c-1)=0.$$

Откуда следует требуемое неравенство.

Пример 5. (Pham Kim Hung). Пусть даны положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство $\frac{1}{a^2+11}+\frac{1}{b^2+11}+\frac{1}{c^2+11}+\frac{1}{d^2+11}\leq\frac{1}{3}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2+11}, x \in (0;4)$. Составим уравнение касательной к графику f в точке $x_0 = 1$:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{7-x}{72}.$$

Поскольку неравенство

$$\frac{1}{x^2+11} \le \frac{7-x}{72}. \quad (4)$$

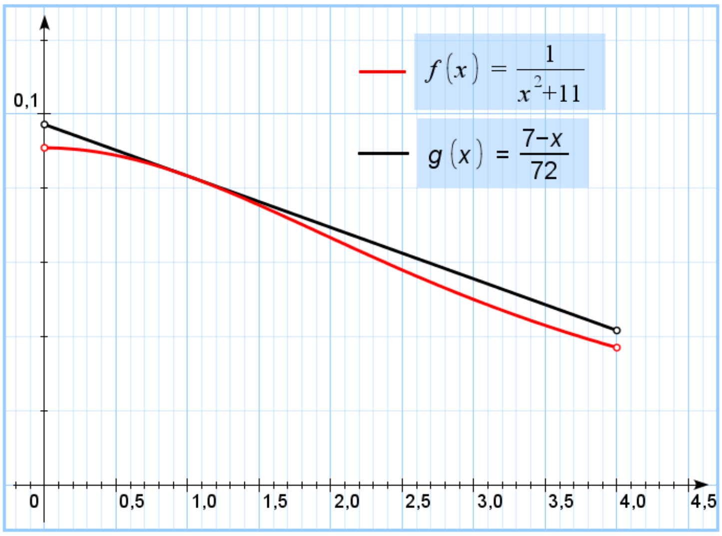


Рис. 5

эквивалентно неравенству (см. рис. 5)

$$(x-1)^2(x-5) \le 0,$$

которое на интервале $(0;4)$ является верным, то применяя неравенство (4), согласно условию задачи имеем

$$\frac{1}{a^2+11} + \frac{1}{b^2+11} + \frac{1}{c^2+11} + \frac{1}{d^2+11} \le \frac{28-(a+b+c+d)}{72} = \frac{1}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 6. Пусть даны числа *a*, *b*, *c*≤1 такие, что *a*+*b*+*c*=1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \le \frac{27}{10}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, где $x \le 1$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0 = \frac{1}{3}$:

$$y = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10} - \frac{27}{50}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{54-27x}{50}.$$

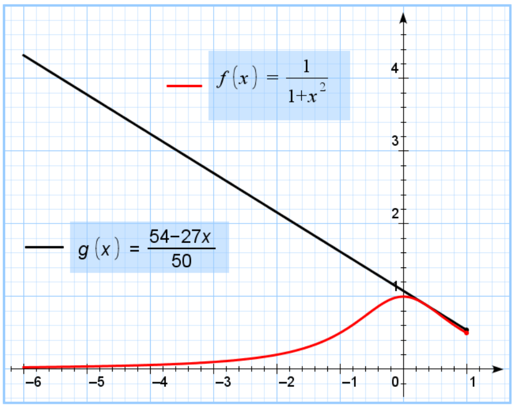


Рис.6

Заметим, что неравенство (см. рис. 6)

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{54-27x}{50} \qquad (5)$$

является верным, поскольку оно эквивалентно неравенству

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(27x-36) \leq 0,$$

которое при $x \leq 1$ верно. Применяя неравенство (5), согласно условию задачи имеем

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{54 \cdot 3 - 27(a+b+c)}{50} = \frac{27}{10}.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

Пример 7. Пусть даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n.$$

Для всякого натурального k докажите следующее неравенство

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k \geq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}.$$

Решение. Пусть $f_k(x) = x^k - x^{k-1}$, где $x>0$, $k \in N$. Составим уравнение касательной к графику функции f_k в точке $x_0 = 1$ ($k \in N$):

$$y = f_k(1) + f_k'(1)(x-1) = x - 1.$$

Заметим, что для каждого натурального $k \geq 2$ неравенство

$$x^k - x^{k-1} \geq x - 1 \qquad (6)$$

является верным, поскольку оно эквивалентно неравенству

$$(x-1)^2(x^{k-2} + x^{k-3} + \ldots + 1) \geq 0.$$

Применяя неравенства (6), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^k - a_k^{k-1}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k - 1) = 0.$$

Откуда следует требуемое неравенство.

Пример 8. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c\leq 1{,}5$. Найдите наименьшее значение выражения

$$A = a + b + c + \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}.$$

Решение. Рассмотрим $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Составим уравнение к графику функции f точке $x_0 = \frac{1}{2}$:

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4 - 3x.$$

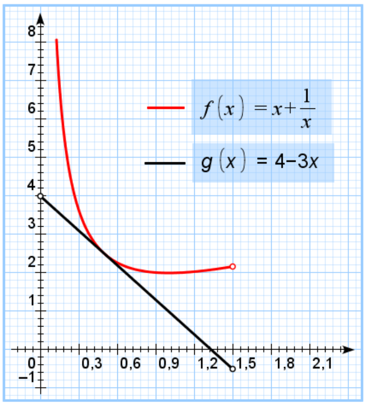


Рис.7

Заметим, что неравенство (см. рис. 7)

$$\frac{x^2+1}{x} \geq 4 - 3x. \tag{7}$$

на множестве $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ эквивалентно верному неравенству $(2x-1)^2 \geq 0$. Применяя неравенство (7), получим

$$A = f(a) + f(b) + f(c) \geq 12 - 3(a + b + c) \geq 12 - 4{,}5 = 7{,}5.$$

и равенство достигается при $a = b = c = \frac{1}{2}$. Следовательно, наименьшим значением выражения

$$A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

где a, b, c – положительные числа, сумма которых не превосходит 1,5, является 7,5.

Пример 9. (Junior Balkan Mathematical Olympiad, 2012, задача 1). Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

Решение. Положим $f(x)=\frac{1-x}{x}-2\sqrt{\frac{2(1-x)}{x}}$, где $x \in (0;\ 1)$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=\frac{1}{3}$:

$$y=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=-2-0\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=-2.$$

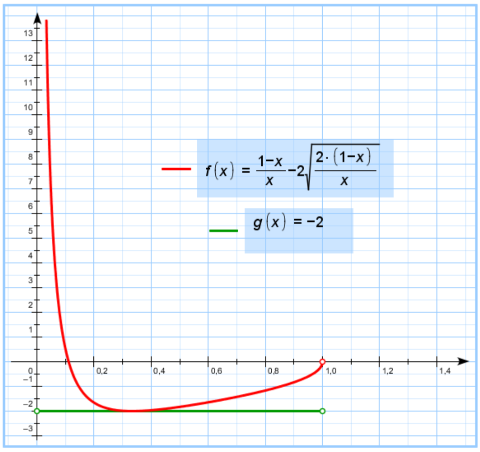


Рис. 8

Докажем, что неравенство (см. рис.8)

$$\frac{1-x}{x}-2\sqrt{\frac{2(1-x)}{x}} \geq -2 \tag{8}$$

выполнено для каждого $x \in (0;\ 1)$. Действительно, запишем неравенство (8) в следующем виде

$$\frac{1+x}{x} \geq \frac{2\sqrt{2(1-x)}}{\sqrt{x}}. \tag{9}$$

Возведя в квадрат обе части неравенства (9), после домножения на x^2, раскрытия скобок и приведения подобных, получим

$$(3x-1)^2 \geq 0,$$

которое, очевидно, верно для всякого $x \in (0;\ 1)$. Далее, применяя неравенство (8), получим

$$\frac{1-b}{b}+\frac{1-c}{c}+\frac{1-a}{a}-2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right) \geq -6.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 10. (Западно-Китайская олимпиада, 2004, задача 3). Найдите все значения числа k такие, что неравенство

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1 \geq k(a+b+c+d)$$

выполнено для всех $a, b, c, d \in [-1; +\infty)$.

Решение. Положим $S=a+b+c+d$, $f(x)=x^3$, где $x \geq -1$. Выберем x_0 таким образом, что $4(f(x_0)-f'(x_0)x_0)=-1$. То есть, $x_0=0{,}5$. Составим уравнение касательной в точке $x_0=0{,}5$:

$$y=f(0{,}5)+f'(0{,}5)(x-0{,}5)=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3x-1}{4}.$$

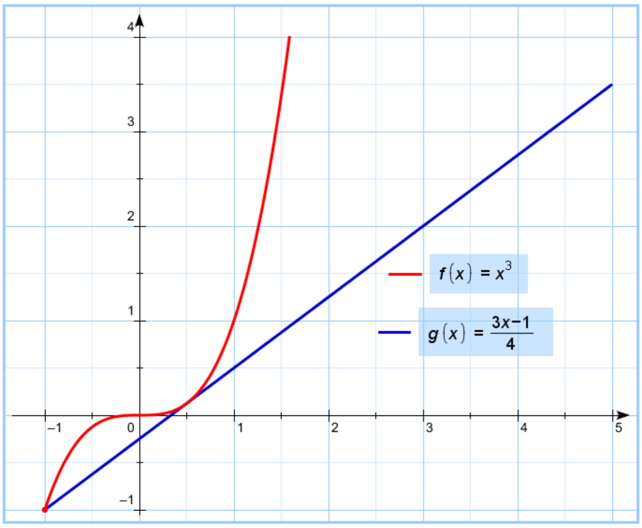


Рис. 9

Заметим, что неравенство (см. рис.9)

$$x^3 \geq \frac{3x-1}{4} \qquad (10)$$

эквивалентно неравенству $(x-0{,}5)^2(x+1) \geq 0$. Поэтому неравенство (10) верно для всякого $x \geq -1$. Применяя это неравенство, получим

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq -1+\frac{3}{4}(a+b+c+d).$$

Таким образом, $k=0{,}75$ удовлетворяет условию задачи. Однако k не может быть больше 0,75, иначе при $a=b=c=d=0{,}5$ неравенство

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1 \geq k(a+b+c+d).$$

было бы не верным, что противоречит выбору числа k.

Пример 11. (Молдова, 1995) Пусть даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Решение. В силу однородности исходного неравенства нам достаточно доказать его в случае, когда a+b+c=3. В этом случае наше неравенство запишется в виде

$$\sqrt{\frac{a}{3-a}}+\sqrt{\frac{b}{3-b}}+\sqrt{\frac{c}{3-c}}>2.$$

Положим $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3-x}}$, $x\in(0;3)$. Заметим, что если взять a=b=1,5, c=0, то наше неравенство обращается в равенство. Поэтому нам необходимо составить уравнение касательной так, чтобы она проходила через две точки графика функции f с абсциссами 0 и 1,5, и график функции f лежал бы не ниже её, если, конечно, такая касательная существует. Выпишем уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=1{,}5$:

$$y=f(1{,}5)+f'(1{,}5)(x-1)=1+\frac{2}{3}(x-1{,}5)=\frac{2}{3}x.$$

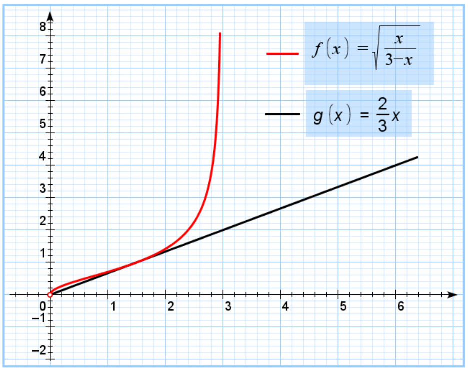


Рис. 10

Поскольку следующие неравенства эквивалентны (см. рис. 10)

$$\sqrt{\frac{x}{3-x}}\geq\frac{2}{3}x\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{3}x+1\right)\geq0\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2\geq0,$$

последнее из которых для всех $x\in(0;3)$ является верным, то применяя первое из них трижды, получим

$$\sqrt{\frac{a}{3-a}}+\sqrt{\frac{b}{3-b}}+\sqrt{\frac{c}{3-c}}\geq\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}(a+b+c)=2.$$

В силу того, что у нас числа a, b, c положительные, равенство возможно только, только если $a=b=c=\frac{3}{2}$, но $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\neq3$. Значит, равенство не достигается. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{a}{3-a}}+\sqrt{\frac{b}{3-b}}+\sqrt{\frac{c}{3-c}}>2.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 12. Пусть даны положительные числа *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}.$$

Решение. Положим

$$f(a,b,c,d)=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}.$$

Поскольку функция $f(a,b,c,d)$ является однородной порядка 0, то минимум, если он существует, достигается в случае $a+b+c+d=4$. В этом случае функцию f можно записать в виде

$$f(a,b,c,d)=\frac{a}{4-a}+\frac{b}{4-b}+\frac{c}{4-c}+\frac{d}{4-d}+\frac{4-a}{b}+\frac{4-b}{b}+\frac{4-c}{c}+\frac{4-d}{d}.$$

Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{x}{4-x}+\frac{4-x}{x}$, $x\in(0;4)$. Составим уравнение касательной к графику функции g в точке $x_0=1$:

$$y=g(1)+g'(1)(x-1)=\frac{10}{3}-\frac{32}{9}(x-1)=\frac{62-32x}{9}.$$

Докажем, что для каждого $x\in(0;4)$ справедливо неравенство (см. рис. 8)

$$\frac{x}{4-x}+\frac{4-x}{x}\geq\frac{62-32x}{9}. \qquad (11)$$

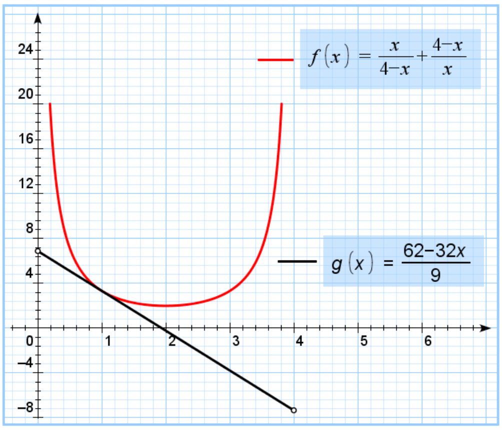


Рис. 11

Действительно, умножим левую и правую часть неравенства (11) на положительное число $9x(4-x)$, тогда после приведения подобных слагаемых, получим

$$2x^3-13x^2+20x-9\leq 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$(x-1)^2(2x-9)\leq 0. \qquad (12)$$

А поскольку x<4, то $2x$<8<9, то неравенство (12) верно, значит и неравенство (11) верно. Отсюда,

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{62 \cdot 4 - 32(a + b + c + d)}{9} = \frac{40}{3}$$

и равенство достигается при a=b=c=d=1. Следовательно, наименьшим значением выражения

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d},$$

где a, b, c, d – положительные числа, является число $\frac{40}{3}$.

2. Касательная: парабола

Пример 13. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что a^2+b^2+c^2=3. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1$.

Решение. Заметим, что если a=b=c=1, то $\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} = 1$. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^3+2}$, $g(x)$=kx^2+m, $x \in (0; \sqrt{3})$. Числа k и m выберем такими, что $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$. То есть $k + m = \frac{1}{3}$, $2k = -\frac{1}{3}$. Следовательно, $g(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{1}{2}$. Неравенство (см. рис. 12)

$$\frac{1}{x^3+2} \geq -\frac{x^2}{6} + \frac{1}{2} \qquad (13)$$

является верным, поскольку оно эквивалентно неравенству $x^2(x-1)^2(x+2) \geq 0$.

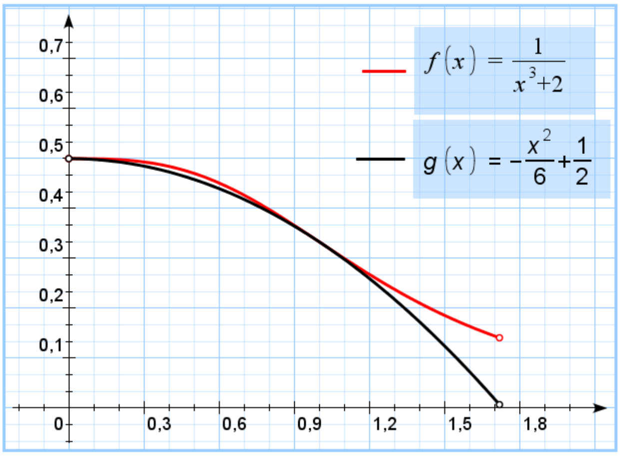


Рис. 12

Применяя неравенство (13), получим

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq \frac{3}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} = 1.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Пример 14. (Китай, 1989) Для любого целого положительного числа n, положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}{\sqrt{n-1}}.$$

Решение. Положим $x_k = y_k^2$, $y_k > 0$, k=1, 2, …, n. Тогда наше неравенство запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\sqrt{1-y_k^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

где для каждого k=1, 2, …, n число y_k являются положительными и $\sum_{l=1}^{n} y_l^2 = 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (0;1)$. Решим предварительно следующую задачу: среди функций вида $g(x) = A \cdot x^2 + \frac{1}{\sqrt{n-1}} x + B$ найти такую, что $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ и при всех x>0 удовлетворяющих неравенству $f(x) \geq g(x)$. Отсюда,

$$\frac{A}{n} + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} + B = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \frac{2A}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} = \frac{2n-1}{(n-1)\sqrt{n-1}}.$$

Следовательно, $A = \frac{n\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}$, $B = -\frac{\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}$. Осталось убедиться в том, что $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in (0;1)$ (см. рис.13а, 13б), то есть (0<x<1)

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{n\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}} x^2 + \frac{1}{\sqrt{n-1}} x - \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}. \qquad (14)$$

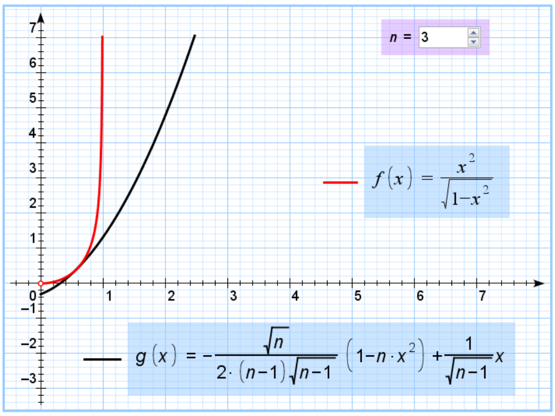


Рис. 13а

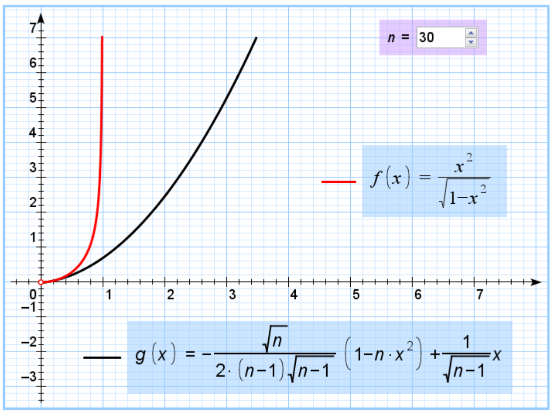


Рис. 13б

Выполним эквивалентные преобразования неравенства (14):

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}(nx^2-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(nx^2-1)}{\sqrt{(1-x^2)(n-1)}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)} \geq \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}(nx^2-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(nx^2-1)\left(2(n-1)x-\sqrt{n}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\right)}{2(n-1)\sqrt{(1-x^2)(n-1)}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(nx^2-1)\left(\sqrt{n(1-x^2)}\left(x\sqrt{n-1}-\sqrt{1-x^2}\right)+2x\sqrt{n-1}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n(1-x^2)}\right)\right)}{2(n-1)\sqrt{(1-x^2)(n-1)}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(nx^2-1)\left(\frac{\sqrt{n(1-x^2)}(nx^2-1)}{\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)}+\frac{2x\sqrt{n-1}(nx^2-1)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n(1-x^2)}}\right)}{2(n-1)\sqrt{(1-x^2)(n-1)}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(nx^2-1)^2\left(\frac{\sqrt{n}\sqrt{n(1-x^2)}}{\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)}+\frac{2x\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n(1-x^2)}}\right)}{2(n-1)\sqrt{(1-x^2)(n-1)}\left(x\sqrt{n-1}+\sqrt{1-x^2}\right)} \geq 0.$$

Следовательно, неравенство (14) верно при любых $x \in (0;1)$. Отсюда,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\sqrt{1-y_k^2}} \geq \frac{n\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{n\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 15. (Pham Kim Hung) Пусть даны положительные числа *a, b, c* такие, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Решение. Положим $f(x)=\frac{1}{2-x}$, $g(x)=kx^2+m$ где $x \in \left(0;\sqrt{3}\right)$. Заметим, что при $a=b=c=1$ наше неравенство обращается в равенство. Числа k и m выберем таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть $1=k+m$, $1=2k$. Следовательно, $k=m=0{,}5$ и $g(x)=\frac{x^2+1}{2}$.

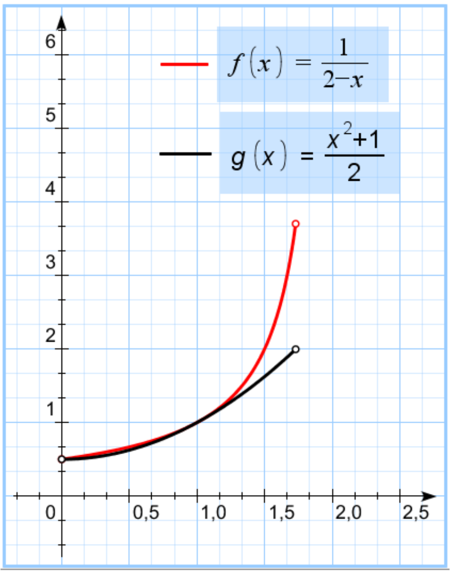


Рис.14

Поскольку неравенство $\frac{1}{2-x} \geq \frac{x^2+1}{2}$ эквивалентно неравенству $x(x-1)^2 \geq 0$ (см.рис.14), то применяя его трижды получим

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3}{2} = 3.$$

Пример 16. Пусть даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+a^2}{a} \geq 2(a+b+c).$$

Решение. Ясно, что неравенство $\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+a^2}{a} \geq 2(a+b+c)$ является однородным порядка 1. Поэтому его достаточно доказать для случая $a^2+b^2+c^2 = 3$. В этом случае оно запишется в виде

$$\frac{3-3a^2}{a} + \frac{3-3c^2}{c} + \frac{3-3b^2}{b} \geq 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{3-3x^2}{x}$, где $x \in (0; \sqrt{3})$. Решим предварительно следующую задачу: среди функций вида $g(x) = kx^2 + m$ найти такую, что $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$ и для всякого $x \in (0; \sqrt{3})$ выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$. Отсюда, числа k и m должны удовлетворять следующим равенствам $k + m = 0$, $2k = -6$. Следовательно, $k = -3$, $m = 3$. Осталось убедиться в том, что $f(x) \geq g(x)$ при всех $x > 0$. Последнее верно в силу того, что

$$\frac{3-3x^2}{x} \geq 3(1-x^2) \qquad (15)$$

эквивалентно неравенству $\frac{3(1-x)^2(1+x)}{x} \geq 0$, которое, очевидно для указанных x верно (см. рис.15).

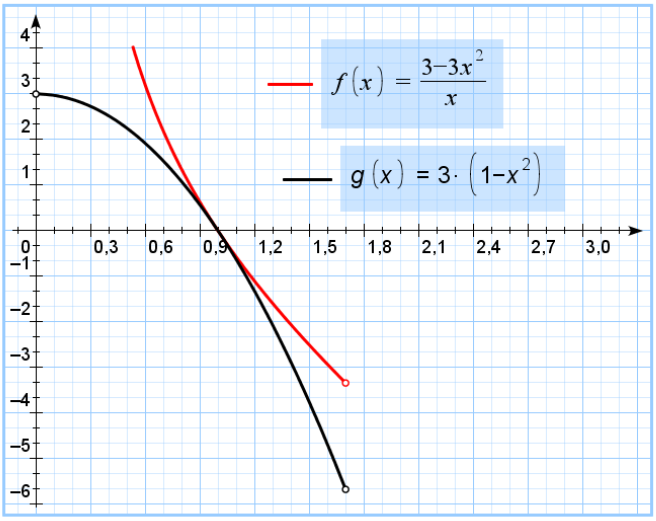


Рис. 15

Применяя неравенство (15), согласно условию задачи имеем

$$\frac{3-3a^2}{a}+\frac{3-3c^2}{c}+\frac{3-3b^2}{b} \geq -3(a^2+b^2+c^2)+9=0.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

Пример 17. Пусть даны положительные числа a, b, c, d такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}+\sqrt{1-d} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}.$$

Решение. Положим $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$, $g(x)=kx^2+m$, где $0<x<1$. Числа k и m выберем таким образом, что $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)$. То есть числа k и m удовлетворяют следующим равенствам $0=\frac{k}{4}+m$, $-\sqrt{2}=k$. Значит, $g(x)=-\sqrt{2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$. Докажем, что для всякого $x \in (0;1)$ справедливо неравенство (см. рис. 4)

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x} \geq -\sqrt{2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right) \qquad (16)$$

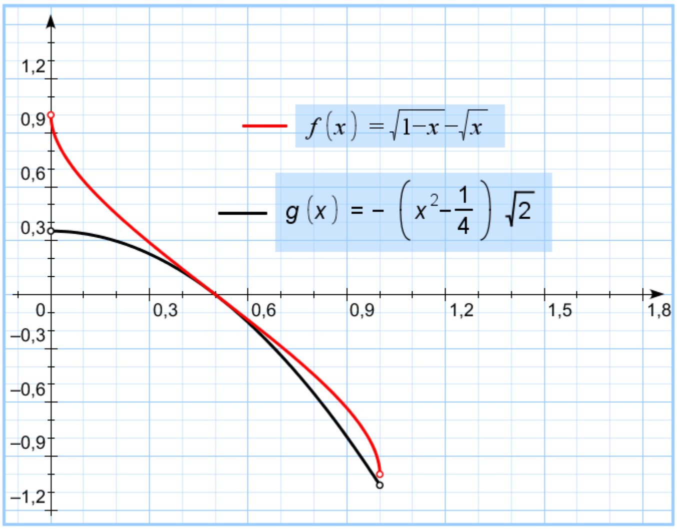


Рис. 16

Выполним некоторые эквивалентные преобразования неравенства (16):

$$\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} \geq \frac{(1-2x)(1+2x)}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{(1-2x)\left(2\sqrt{2}-(1+2x)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2x)\left(2\sqrt{2}-(1+2x)\left(\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}(1+2x)+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}-2x\sqrt{x}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}(1+2x)+2\left(1-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1-\sqrt{2x}\right)^2\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(\frac{\left(1+\sqrt{2x}\right)(1+2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+2\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} \geq 0.$$

Очевидно, что последнее неравенство верно для всякого $x \in (0;1)$. Значит, и неравенство (16) верно для указанных x. Отсюда,

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}+\sqrt{1-d}-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d} \geq$$

$$\geq -\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2+d^2-1) = 0.$$

Откуда следует требуемое неравенство.

3. Касательная: степенная функция

Пример 18. Пусть даны числа a, b, c. Докажите неравенство

$$a^4+b^4+c^4 \geq 4abc-1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^4$, где $x \in R$. Решим предварительно следующую задачу среди функций вида $g(x)=kx^3+m$ найти такую, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$ и $f(x) \geq g(x)$, где x – любое действительное число. Отсюда, числа k и m должны удовлетворять следующим равенствам $k+m=1$, $4=3k$. Следовательно, $k=\frac{4}{3}$, $m=-\frac{1}{3}$.

Осталось убедиться в том, что $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in R$. Последнее верно, поскольку неравенство (см. рис.4)

$$x^4 \geq \frac{4x^3-1}{3} \tag{17}$$

эквивалентно неравенству

$$(x-1)^2\left(3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right) \geq 0,$$

которое, очевидно верно для всякого числа x.

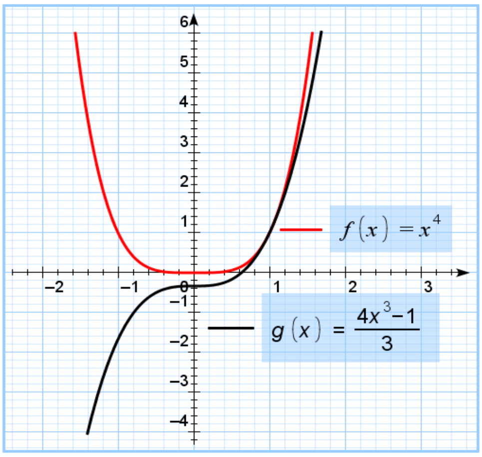


Рис.17

Применяя неравенство (17), в силу неравенства Коши $|a|^3+|b|^3+|c|^3 \geq 3|abc|$ и неравенства $|t| \geq t$ имеем,

$$a^4+b^4+c^4 = |a|^4+|b|^4+|c|^4 \geq \frac{4(|a|^3+|b|^3+|c|^3)}{3} - 1 \geq$$

$$\geq 4|abc| - 1 \geq 4abc - 1.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Пример 19. Пусть a, b, c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} \geq \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+b+c}.$$

Решение. Поскольку данное неравенство является однородным, порядка (-0,5), то его достаточно доказать в случае, когда $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 3$. В этом случае оно запишется в виде

$$\frac{1}{3-2\sqrt{a}} + \frac{1}{3-2\sqrt{b}} + \frac{1}{3-2\sqrt{c}} \geq \frac{9}{a+b+c}. \tag{18}$$

Заметим, что в силу неравенства треугольника и неравенства между средним арифметическим и среднеквадратичным имеем, что $\sqrt{a} < 1{,}5$, $\sqrt{b} < 1{,}5$ $\sqrt{c} < 1{,}5$ и

$a+b+c \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3} = 3$. Поэтому, если левая часть неравенства (18) будет не меньше 3, то это неравенство будет верным.

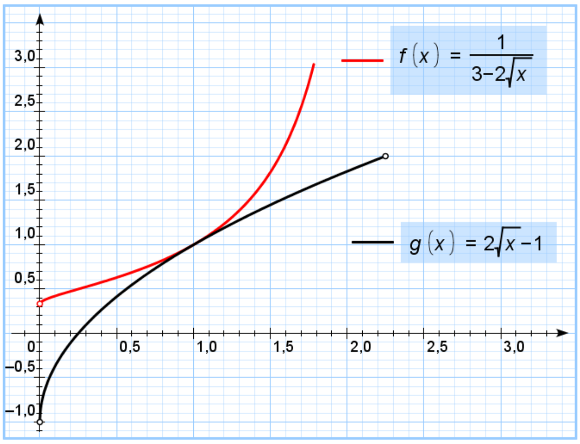


Рис. 18

Положим $f(x) = \frac{1}{3-2\sqrt{x}}$, $x \in (0;\ 2{,}25)$, $g(x) = k\sqrt{x}+m$, где числа k и m такие, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть числа k и m удовлетворяют равенствам $k+m=1$, $\frac{k}{2} = 1$. Отсюда, k=2, m=-1. Поскольку неравенство $\frac{1}{3-2\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{x}-1$ на интервале (0; 2,25) эквивалентно неравенству $4(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ (см. рис. 18), то применив его для чисел a, b, $c \in (0;2{,}25)$, получим

$$\frac{1}{3-2\sqrt{a}} + \frac{1}{3-2\sqrt{b}} + \frac{1}{3-2\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) - 3 = 3.$$

Следовательно, в силу ранее указанного требуемое неравенство доказано.

Пример 20. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}=3$. Докажите неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}.$$

Решение. Положим $f(x)=x^2-x^{4/3}$, $g(x)=kx^{2/3}+m$, где $0<x<3\sqrt{3}$. Заметим, что при a=b=c=1 наше неравенство обращается в равенство. Числа k и m выберем таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть числа k и m удовлетворяют следующим равенствам $0=k+m$, $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}k$. Следовательно, $g(x)=x^{2/3}-1$. Поскольку неравенство $x^2-x^{\frac{4}{3}} \geq x^{2/3}-1$ (см. рис. 9) эквивалентно неравенству $\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2\left(x^{2/3}+1\right) \geq 0$, которое очевидно верно, то

$$a^2+b^2+c^2-a^{4/3}-b^{4/3}-c^{4/3} \geq a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}-3=0.$$

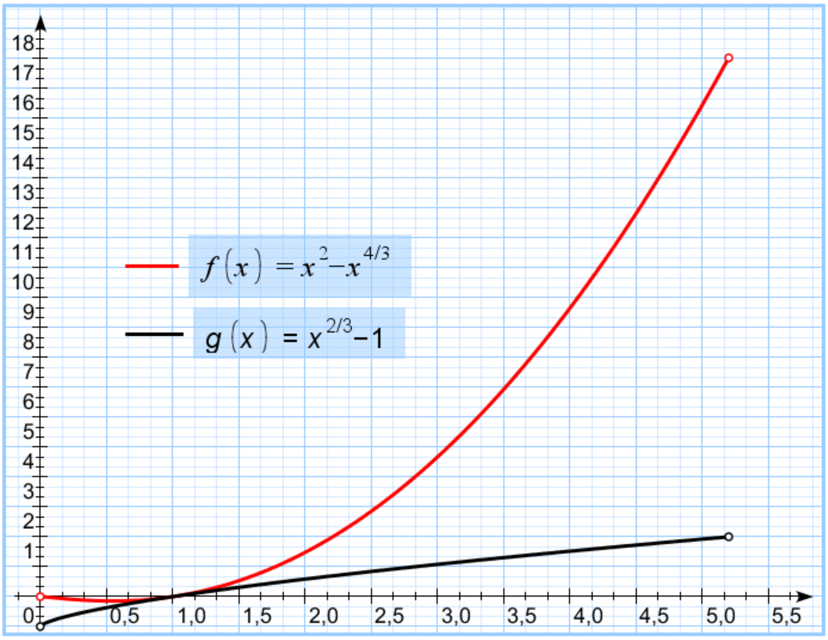


Рис. 19

4. Касательная: логарифмическая функция

Пример 21. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\geq 1.$$

Решение. Пусть $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, тогда x, y, $z>0$, $xyz=1$ и наше неравенство запишется в виде

$$\frac{x^2}{x^2-2x+4}+\frac{y^2}{y^2-2y+4}+\frac{z^2}{z^2-2z+4}\geq 1.$$

Заметим, что при $x=y=z=1$ выполнено равенство

$$\frac{x^2}{x^2-2x+4}+\frac{y^2}{y^2-2y+4}+\frac{z^2}{z^2-2z+4}=1.$$

Положим $f(t)=\frac{t^2}{t^2-2t+4}, g(t)=kln t+m, t\in(0;+\infty)$. Числа k и m определим таким образом, чтобы $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть числа k и m удовлетворяют следующим равенствам $\frac{1}{3}=m, \frac{2}{3}=k$. Следовательно, $g(t)=\frac{2ln t+1}{3}$. Рассмотрим неравенство (см. рис.20)

$$\frac{t^2}{t^2-2t+4}\geq\frac{2ln t+1}{3} \qquad (19)$$

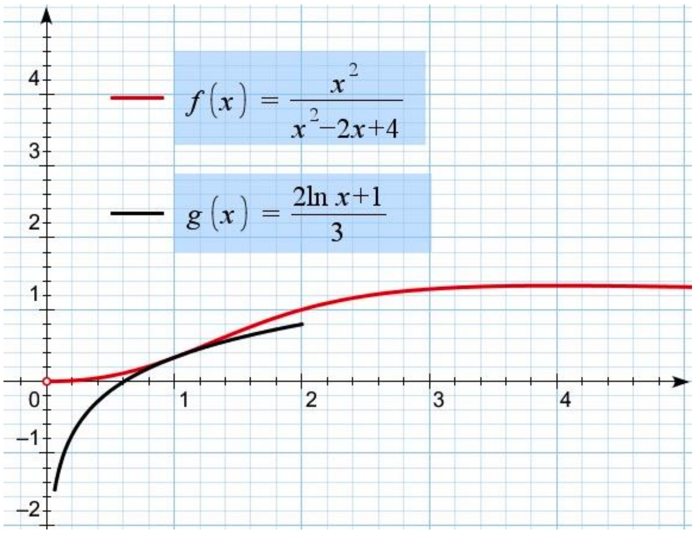


Рис. 20

Положим $h(t) = \frac{t^2}{t^2-2t+4} - \frac{2lnt+1}{3}, t > 0$. Поскольку производная функции h

$$h'(t) = \frac{-(t-1)(t^3-16)}{(t^2-2t+4)^2}$$

на интервале (0;1) принимает отрицательные значения, а на интервале (1;2) положительные значения, то

$$\min_{0<t<2} h(t) = h(1) = 0.$$

Следовательно, неравенство (19) справедливо для всех t на интервале (0;2). Отсюда, если положительные числа x, y, z меньше 2, то согласно неравенству (19) имеем

$$\frac{x^2}{x^2-2x+4} + \frac{y^2}{y^2-2y+4} + \frac{z^2}{z^2-2z+4} \geq \frac{2lnx + 2lny + 2lnz + 3}{3} = \frac{2\,ln(xyz) + 3}{3} = 1.$$

Если же, например, $x \geq 2$, то в силу неотрицательности значений функции f имеем

$$\frac{x^2}{x^2-2x+4} + \frac{y^2}{y^2-2y+4} + \frac{z^2}{z^2-2z+4} \geq \frac{x^2}{x^2-2(x-2)} \geq \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Тем самым, требуемое неравенство полностью доказано.

Замечание 2. Решение примера 21 аналогично решению в книге Pham Kim Hung (см. ([1], стр. 135-136). Единственное отличие – вычисления. Благодаря замене переменных $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ техническая сторона стало не только короче, но и существенно проще. Подобные замены переменных могут быть полезны для доказательства других неравенств, в которых произведение переменных постоянно.

Пример 22. (Baltic way, 2005). Пусть даны положительные числа *a, b, c* такие, что *abc*=1. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

Решение. Положим $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$, $g(x)=klnx+m$, где x>0. Числа k и m выберем таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$, то есть $\frac{1}{3}=m$, $\frac{1}{9}=k$. Отсюда, $g(x)=\frac{lnx+3}{9}$. Рассмотрим функцию $h(x)=\frac{x}{x^2+2}-\frac{lnx+3}{9}$, где x>0. Поскольку для каждого x>2/7 выполнено $x^3+10x^2+14\left(x-\frac{2}{7}\right)>0$, то производная

$$h'(x)=\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}-\frac{1}{9x}=-\frac{(x-1)(x^3+10x^2+14x-4)}{9x(x^2+2)^2}$$

на промежутке $\left[\frac{2}{7};+\infty\right)$ обращается в ноль в одной точке $x_0=1$. А учитывая, что $h(1)=0$, $h\left(\frac{2}{7}\right)=-\frac{10}{51}+\frac{\ln\frac{7}{2}}{9}<0$ и на промежутке [1; +∞) функция h убывает ($h'(x)<0,$ при $x>1$), то для всякого x≥2/7 справедливо неравенство (см. рис. 21)

$$\frac{x}{x^2+2}\leq\frac{lnx}{9}+\frac{1}{3}. \qquad (20)$$

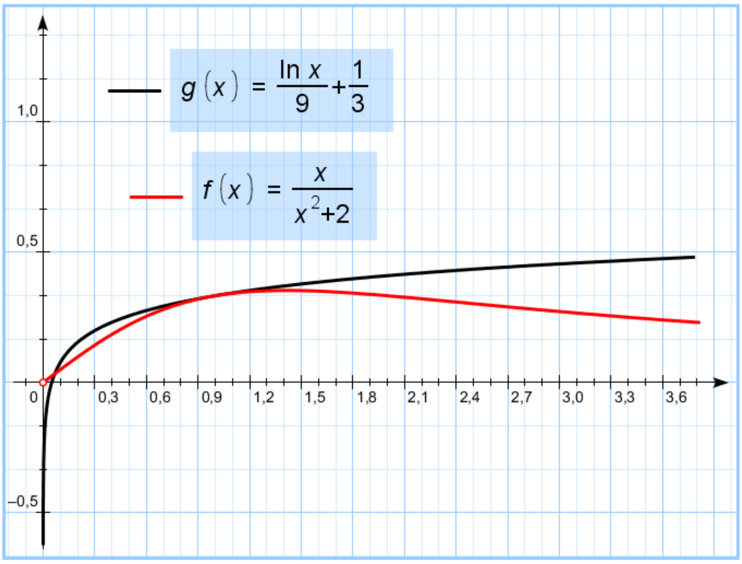


Рис. 21

Рассмотрим два случая.

1) Если каждое чисел a, b, c не меньше 2/7, то согласно неравенству (20) имеем

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1+\frac{\ln(abc)}{9}=1.$$

2) Пусть для определенности, не теряя общности, число a<2/7. Заметим, что

$$f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{(x^2+2)^2}.$$

Значит, на промежутке $(0; \sqrt{2})$ функция f возрастает, а на промежутке $(\sqrt{2}; +\infty)$ - убывает. Отсюда,

$$\max_{\left(0;\frac{2}{7}\right]} f(x) = f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{7}{51}, \ \max_{(0;+\infty)} f(x) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{7}{51} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0{,}15 + 0{,}75 < 1.$$

Таким образом, требуемое неравенство полностью доказано.

Пример 23. Пусть даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \ge 1.$$

Решение. Пусть дана функция $f(x) = 10x^3 - 9x^5$, $x \in (0; 1]$. Заметим, что при $a = b = c = \frac{1}{3}$ справедливо равенство $10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) = 1$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0 = \frac{1}{3}$:

$$y = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{25}{9}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}.$$

Рассмотрим неравенство (см. рис. 22)

$$10x^3 - 9x^5 \ge \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}. \tag{21}$$

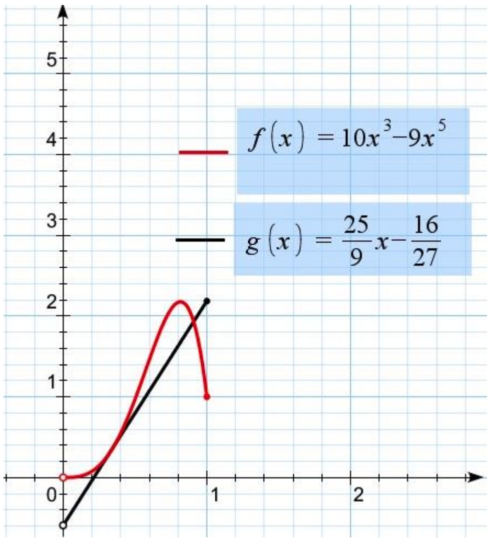


Рис. 22

Неравенство (21) можно записать также в следующем виде

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(9x^3+6x^2-7x-\frac{16}{3}\right) \le 0.$$

А поскольку для всякого $x \in (0; 0{,}9)$ выполнено

$$9x^3+6x^2-7x-\frac{16}{3} = (x-0{,}9)(9x^2+14{,}1x+5{,}69)-\frac{637}{3000} < 0,$$

то неравенство (22) справедливо при всех $x \in (0; 0{,}9)$. Значит, если положительные числа a, b, c меньше 0,9 и их сумма равна 1, то согласно неравенству (22 имеем

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \ge \frac{25}{9}(a+b+c)-3\cdot\frac{16}{27} = 1.$$

Если же хотя бы одно из чисел a, b, c не меньше 0,9, то в силу того, что функция f убывает на промежутке [0,9; 1], т.к.

$$f'(x) = -45x^2\left(x^2-\frac{2}{3}\right) < 0, \text{где } x \in [0{,}9; 1],$$

и функции f на всем промежутке (0; 1] принимает неотрицательные значения имеем

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) = f(a)+f(b)+f(c) \ge$$

$$\ge \min_{[0{,}9;\,1]} f(x) = f(1) = 1.$$

5. Произведение значений функции

Пример 24. (IMO, 2012, задача 2). Пусть даны положительные числа a_2, a_3, …, a_n такие, что $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Докажите неравенство

$$(a_2+1)^2\cdot(a_3+1)^3\cdot\ldots\cdot(a_n+1)^n>n^n.$$

Решение. Если для каждого k=2, 3,…, n существует b_k такое, что

$$(a_k+1)^k\ge b_k\cdot a_k>0$$

и

$$b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_n\ge n^n,$$

то требуемое неравенство доказано. Поскольку отсюда следует, что

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdot(a_4+1)^4\cdot\ldots\cdot(a_n+1)^n\ge$$

$$\ge b_2\cdot a_2\cdot b_3\cdot a_3\cdot b_n\cdot a_n\cdot\ldots\cdot b_n\cdot a_n=b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_n\ge n^n.$$

Для каждого k=2, 3, …, n число b_k найдем через уравнение касательной к функции $f_k(x)=(x+1)^k$, $x>0$, в некоторой точке x_0 такой, что $f_k(x_0)=b_kx_0$ и $f_k'(x_0)=b_k$. Следовательно, x_0 удовлетворяет следующем равенству

$$f_k(x_0)=x_0\cdot f_k'(x_0)\text{ или }x_0+1=k\cdot x_0,$$

т.е. $x_0=\frac{1}{k-1}$.

Заметим, что для всякого k≥2 функция $f_k(x)$ является на промежутке (0; +∞) выпуклой вниз, т.к. $f_k''(x)=k\cdot(k-1)\cdot(x+1)^{k-2}>0$ для всех x>0 (подробнее о выпуклых функциях см. [4]). Следовательно, график функции f_k лежит не ниже касательной проведенной в точке x_0, т.е. для всякого x>0 справедливо неравенство (см. рис. 23а, 23б)

$$f_k(x)=(x+1)^k\ge f_k(x_0)+f_k'(x_0)\cdot(x-x_0)=\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\cdot x$$

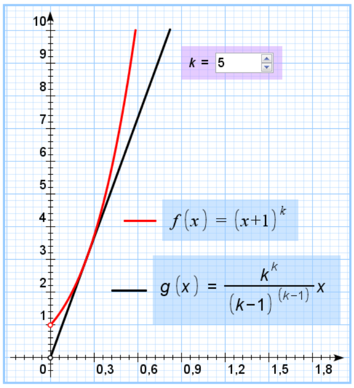


Рис. 23а

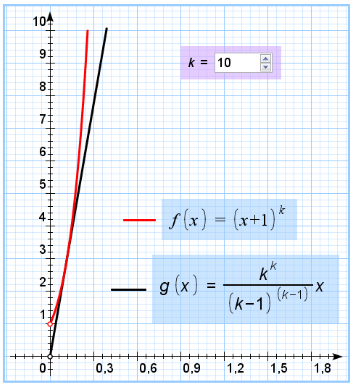


Рис 23б

А поскольку $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}=\frac{\prod_{k=2}^{n}k^k}{\prod_{k=1}^{n-1}k^k}=\frac{n^n}{1^1}=n^n$, то в силу ранее отмеченного требуемое неравенство доказано.

Пример 25. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что abc≥1. Докажите неравенство $\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{27}{8}$.

Решение. Пусть $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, $g(x) = kx^m$, где x>0. Числа k и m определим таким образом, чтобы $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$. То есть числа k и m удовлетворяют равенствам $\frac{3}{2} = k$, $\frac{3}{4} = km$. Следовательно, $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Поскольку неравенство (см. рис.24)

$$x + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{x} \tag{22}$$

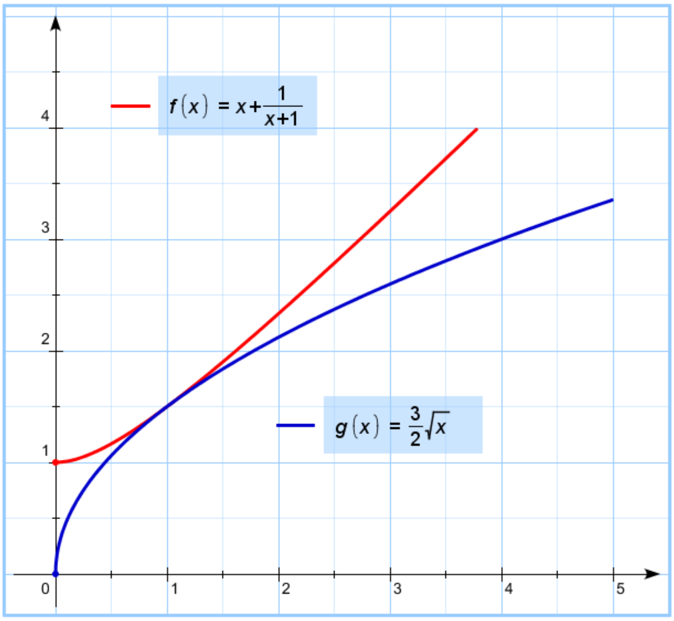


Рис. 24

эквивалентно неравенству

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^2\left(2x + \sqrt{x} + 2\right) \geq 0,$$

которое, очевидно, верно для любого x>0, то неравенство (22) справедливо для всякого положительного числа x. Отсюда,

$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right)\left(b + \frac{1}{b+1}\right)\left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}\sqrt{abc} \geq \frac{27}{8}.$$

Что и требовалось доказать.

6. Фиксация суммы переменных

Пример 26. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что ab+bc+ca=1. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Положим $S = a + b + c$. В силу неравенства:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),$$

которое эквивалентно неравенству

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

имеем, что $S\geq\sqrt{3}$.

Пусть $f(x)=\frac{x^2}{S-x}$, $x\in(0;\ S)$. Составим уравнение касательной в точке $x_0=\frac{S}{3}$ (см.рис.25а, 25б):

$$y=f\left(\frac{S}{3}\right)+f'\left(\frac{S}{3}\right)\left(x-\frac{S}{3}\right)=\frac{S}{6}+\frac{5}{4}\left(x-\frac{S}{3}\right)=\frac{5x-S}{4}.$$

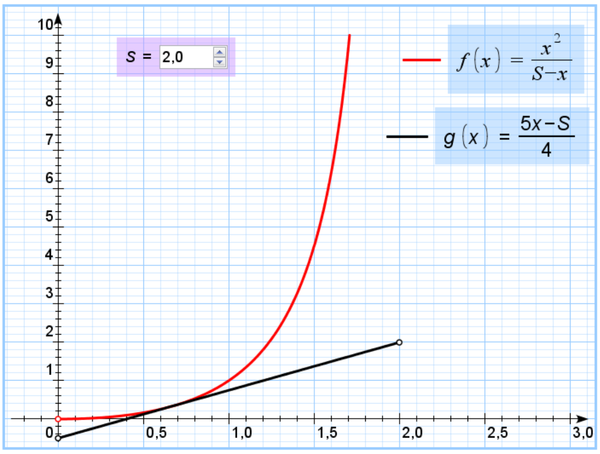


Рис. 25а

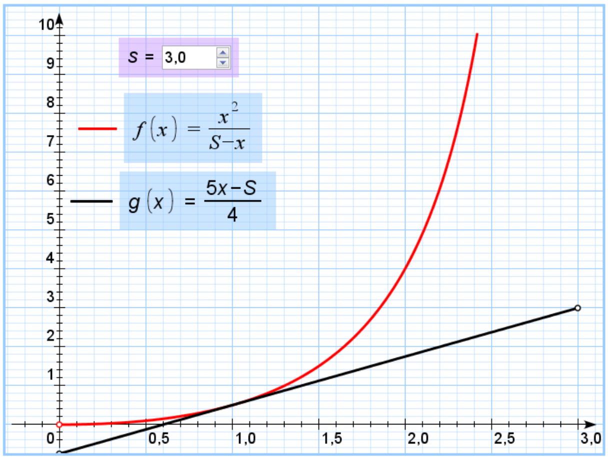


Рис. 25б

Поскольку на интервале $(0;\ S)$ неравенство $\frac{x^2}{S-x}\geq\frac{5x-S}{4}$ эквивалентно неравенству $(S-3x)^2\geq 0$, то применяя его трижды, в силу ранее доказанного неравенства $S\geq\sqrt{3}$ получим

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=\frac{a^2}{S-a}+\frac{b^2}{S-b}+\frac{c^2}{S-c}\geq\frac{5(a+b+c)-3S}{4}=\frac{S}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 27. Пусть даны неотрицательные числа a, b, c. Докажите неравенство $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\geq\sqrt{6(a+b+c)}$.

Решение. Положим $S=a+b+c$. Пусть $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in(0;\ S)$. Составим уравнение касательной в точке $x_0=\frac{S}{3}$:

$$y=f\left(\frac{S}{3}\right)+f'\left(\frac{S}{3}\right)=\frac{\sqrt{s^2+9}}{3}+\frac{s}{\sqrt{s^2+9}}\left(x-\frac{s}{3}\right)=\frac{Sx+3}{\sqrt{s^2+9}}.$$

Поскольку на интервале $(0;\ S)$ неравенство

$$\sqrt{x^2+1}\geq\frac{Sx+3}{\sqrt{s^2+9}} \qquad (23)$$

эквивалентно неравенству $\left(x-\frac{s}{3}\right)^2 \geq 0$, то применяя неравенство (23) и неравенство $\sqrt{s^2+9} \geq \sqrt{6s}$, которое в свою очередь эквивалентно неравенству $(s-3)^2 \geq 0$, получим

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c+1} \geq \sqrt{s^2+9}+\frac{s}{\sqrt{s^2+9}}(a+b+c-s)=\sqrt{s^2+9} \geq$$

$$\geq \sqrt{6s}=\sqrt{6(a+b+c)}.$$

Что и требовалось доказать.

7. Несколько различных функций

Пример 28. Пусть даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3^3}+\frac{b^2}{4^3}+\frac{c^2}{5^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6^3}.$$

Решение. Поскольку исходное неравенство является однородным порядка 2, то его достаточно доказать в случае, когда $a+b+c=6^3$.

Заметим, что $3^3+4^3+5^3=6^3$ и при $a=3^3$, $b=4^3$, $c=5^3$ исходное неравенство обращается в равенство.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$, $x>0$. Как известно, функция f является всюду выпуклой, поэтому график функции f лежит не ниже всякой касательной. Значит, справедливы неравенства

$$a^2 \geq 3^6+2\cdot 3^3(a-3^3),\ b^2 \geq 4^6+2\cdot 4^3(b-4^3),\ c^2 \geq 5^6+2\cdot 5^3(c-5^3).$$

Отсюда,

$$\frac{a^2}{3^3}+\frac{b^2}{4^3}+\frac{c^2}{5^3} \geq 3^3+4^3+5^3+2(a+b+c)-2(3^3+4^3+5^3)=6^3.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

Замечание 3. В решении примера 28 может показаться, что точки касания выбраны благодаря тому, мы заметили особое равенство: $3^3+4^3+5^3=6^3$. На самом же деле, эти точки выбраны таким образом, чтобы производные функций $f_1(x)=\frac{x^2}{3^3}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{4^3}$, $f_3(x)=\frac{x^2}{5^3}$ взятые соответственно в этих точках совпадали, т.е. чтобы были справедливы равенства $\frac{2x_1}{3^3}=\frac{2x_2}{4^3}=\frac{2x_3}{5^3}$. Отсюда, $2x_1=3^3t$, $2x_2=4^3t$, $2x_3=5^3t$, где t – некоторое положительное число. Положив t равным 2, получим точки касания, указанные в решении примера 4. Выбор указанным образом точек касания был особенно важен, поскольку в дальнейшем мы использовали уравнение касательной и для нас было важно, чтобы коэффициенты перед a, b и c совпадали. Данный прием может быть полезен и в других неравенствах, в которых участвуют несколько различных функций.

Пример 29. Пусть даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 3. Найдите минимум выражения $a^2+b^2+c^3$.

Решение. Пусть $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x^3$, где $0<x<3$. Выберем точки x_1 и x_2 таким образом, чтобы $f_1'(x_1)=f_2'(x_2)$ и $x_1+x_1+x_2=3$. То есть $2x_1=3x_2^2$ и $2x_1+x_2=3$. Решив полученную систему уравнений, получим, что $x_1=\frac{19-\sqrt{37}}{12}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{37}}{6}$. В силу выпуклости вниз функций f_1 и f_2 на интервале (0; 3) их графики лежат не ниже касательных, проведенных соответственно в точках x_1 и x_2. Значит, для всякого $x\in(0;3)$ справедливы неравенства (см. рис. 26а, 26б)

$$x^2\geq x_1^2+2x_1(x-x_1),\ x^3\geq x_2^3+3x_2^2(x-x_2). \qquad (24)$$

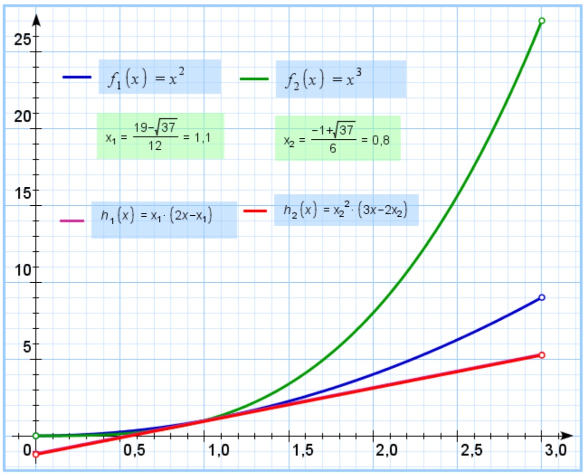


Рис. 26а

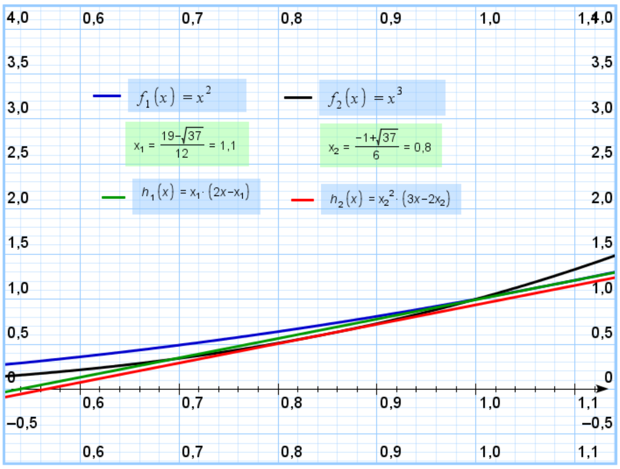


Рис. 26б

Применяя неравенства (24) для x соответственно равным положительным числам a, b, c, сумма которых равна 3, получим

$$a^2+b^2+c^3\geq 2x_1^2+x_2^3+2x_1(a+b+c-2x_1-x_2)=\frac{543-37\sqrt{37}}{108}.$$

Таким образом,

$$\min_{\substack{a,b,c>0\\ a+b+c=3}} f(a,b,c)=f(x_1,x_1,x_2)=\frac{543-37\sqrt{37}}{108},$$

где $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^3$.

Пример 30. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=3$. Найдите минимум выражения $a^4+2b^4+3c^4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f_k(x)=kx^4, x\in(0;3)$, $k=1, 2, 3$. Поскольку $f_k''(x)=12x^2>0$, где $x>0$, то функции f_k являются выпуклыми вниз, а значит, их графики лежат не ниже своих касательных, проведенных в любых точках $x_k\in(0;3)$ ($k=1, 2, 3$). Точки x_1, x_2, x_3 выберем такими, что $f_1'(x_1)=f_2'(x_2)=f_3'(x_3)$ и $x_1+x_2+x_3=3$. То есть

$$4x_1^3=8x_2^3=12x_3^3 \text{ и } x_1+x_2+x_3=3.$$

Отсюда,

$$x_1=\frac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}},\ x_2=\frac{x_1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}},\ x_3=\frac{x_1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}$$

и для всякого $x\in(0;3)$ справедливы неравенства (k=1, 2, 3, см. рис.27)

$$kx^4\geq f_k(x_k)+f_k'(x_k)(x-x_k). \tag{25}$$

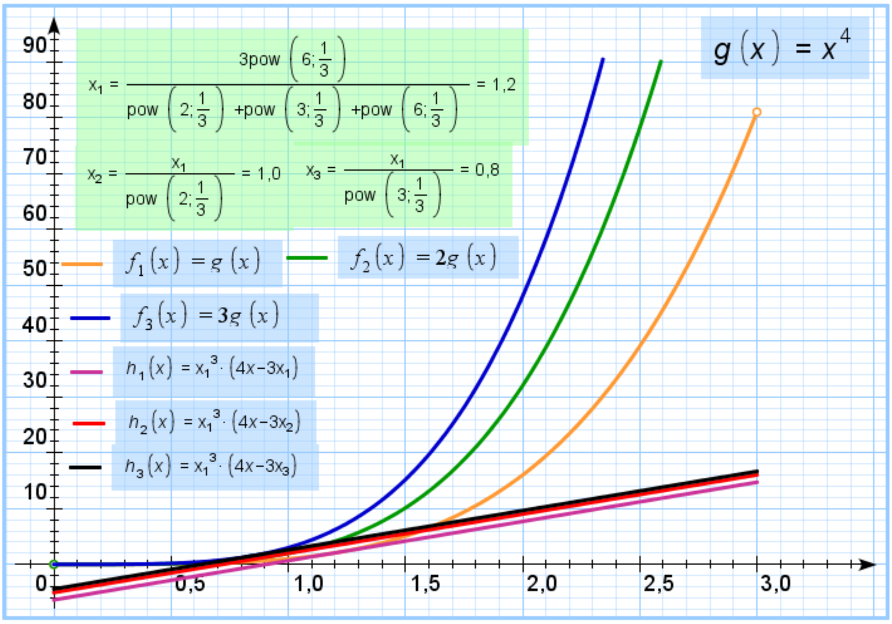


Рис. 27

Складывая неравенства (25) при x соответственно равным числам a, b, c, получим

$$a^4+2b^4+3c^4\geq x_1^4\left(1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right)+f_1'(x_1)(a+b+c-x_1-x_2-x_3)=$$

$$=\frac{81\left(6\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}\right)^4}$$

и равенство достигается при $a=x_1$, $b=x_2$, $c=x_3$. Следовательно, минимум выражения

$$a^4+2b^4+3c^4,$$

где a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 3, является $\frac{81\left(6\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}\right)^4}$.

Пример 31. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a+2b+3c\geq20$. Докажите неравенство $a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq13$.

Решение. Положим $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$. Заметим, что при $a=2$, $b=3$, $c=4$ наше неравенство $a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq13$ обращается в равенство и функция f является выпуклой вниз на множестве $(0; +\infty)$. А следовательно, график функции f лежит не ниже всякой касательной проведенной в точке $x_0>0$. Поэтому справедливы неравенства

$$\tfrac{1}{a} \geq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(a-2) = 1 - \tfrac{a}{4}, \tfrac{1}{b} \geq \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9}(b-3) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{b}{9}, \tfrac{1}{c} \geq \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}(c-4) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{c}{16}.$$

Отсюда, согласно условию задачи имеем

$$a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq a + b + c + 3 - \frac{3}{4}a + 3 - \frac{b}{2} + 2 - \frac{c}{4} =$$

$$= 8 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c = 8 + \frac{a + 2b + 3c}{4} \geq 8 + \frac{20}{4} = 13.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 32. (Санкт-Петербургская олимпиада, 1988, 9 класс, заключительный тур, задача 3). a, b, c, d – положительные вещественные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Решение. Поскольку наше неравенство является однородным, то его достаточно доказать в случае $a+b+c+d=8$. В этом случае оно запишется в следующем виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq 8.$$

Положим $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{4}{x}$, $f_3(x) = \frac{16}{x}$, где $0<x<8$. Точки x_1, x_2, x_3 выберем таким образом, что

$$x_1 + x_1 + x_2 + x_3 = 8, f_1'(x_1) = f_2'(x_2) = f_3'(x_3).$$

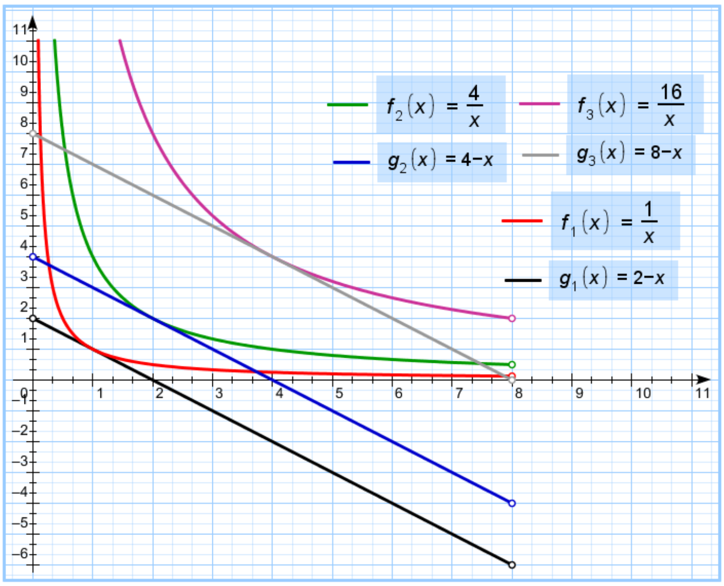


Рис. 28

Несложно убедиться, что в качестве указанных точек можно выбрать следующие: x_1=1, x_2=2, x_3=4. Ясно, что функции f_1, f_2, f_3 являются выпуклыми вниз, следовательно, их графики лежат не ниже соответствующих касательных, то есть справедливы неравенства (см. рис. 28)

$$\frac{1}{a} \geq f_1(1) + f_1'(1)(a-1) = 1-(a-1) = 2-a,$$

$$\frac{1}{b} \geq f_1(1) + f_1'(1)(b-1) = 1-(b-1) = 2-b,$$

$$\frac{4}{c} \geq f_2(2) + f_2'(2)(a-2) = 2-(c-2) = 4-c,$$

$$\frac{16}{d} \geq f_3(4) + f_3'(4)(d-4) = 4-(d-4) = 8-d.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq 16-(a+b+c+d) = 8.$$

Откуда, следует требуемое неравенство.

Пример 33. Пусть даны положительные числа a, b, c. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$.

Решение. Поскольку функция $f(a,b,c)=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$, a, b, c>0 является однородной порядка 0, то минимум, если он существует, достигается при a+b+c=1. Рассмотрим три функции $f_1(x)=3g(x)$, $f_2(x)=4g(x)$, $f_2(x)=5g(x)$, где $g(x)=\frac{x}{1-x}$, $x\in(0;1)$. В силу того, что для каждого $x\in(0;3)$ справедливо неравенство $g''(x)=\frac{3\cdot 2}{(1-x)^3}>0$ функция $g(x)$, а, следовательно, и функции f_1, f_2, f_3, являются всюду выпуклыми вниз на промежутке (0; +∞). Отсюда, графики этих функций лежат не ниже всякой касательной проведенной в точке с положительной абсциссой. Т.е. для всяких x_1, x_2, x_3, x>0 справедливы неравенства (i=1,2, 3)

$$f_i(x) \geq f_i(x_1) + f_i'(x_i)(x-x_i). \tag{26}$$

Выберем положительные числа x_1, x_2, x_3 так, чтобы выполнялись равенства

$$x_1+x_2+x_3=3,$$

$$f_1'(x_1)=f_2'(x_2)=f_3'(x_3).$$

Т.е. числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют следующей системе уравнений (см. рис.29)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{1-x_1} = \frac{2}{1-x_2} = \frac{\sqrt{5}}{1-x_3}. \end{cases} \tag{27}$$

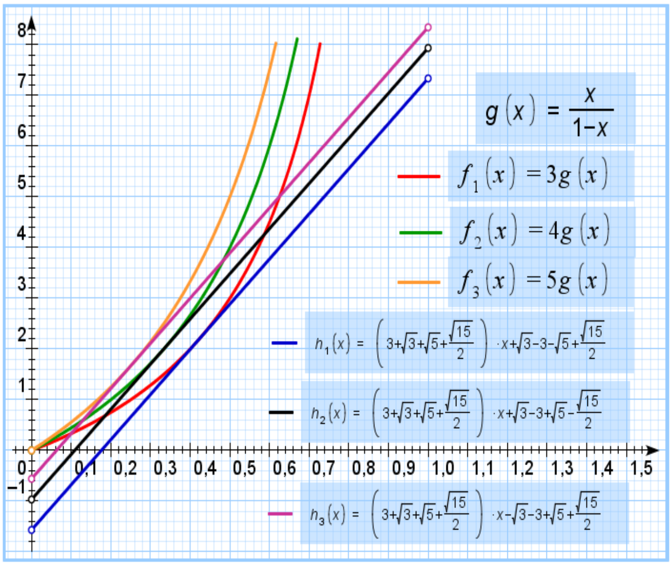


Рис. 29

Положим $t = \frac{1-x_1}{\sqrt{3}}$, тогда $x_1 = 1 - \sqrt{3}t$, $x_2 = 1 - 2t$, $x_3 = 1 - \sqrt{5}t$. Следовательно, из первого равенства системы (27) имеем $t = \frac{2}{\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}$. Значит, $x_1 = \frac{2+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}-2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}$. Складывая неравенства вида (26) для при x соответственно равным x_1, x_2, x_3, имеем

$$\frac{3a}{1-a} + \frac{4b}{1-b} + \frac{5c}{1-c} = f_1(a) + f_2(b) + f_3(c) \geq$$

$$\geq f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_1'(x_1)(a + b + c - x_1 - x_2 - x_3) =$$

$$= \frac{3x_1}{1-x_1} + \frac{4x_2}{1-x_2} + \frac{5x_3}{1-x_3} = \frac{1}{t}\left(\sqrt{3}x_1 + 2x_2 + \sqrt{5}x_3\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) + 2\left(\sqrt{3}-2+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2-\sqrt{5}\right)}{2} =$$

$$= \sqrt{15} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 6 = \frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2}{2} - 12.$$

Таким образом,

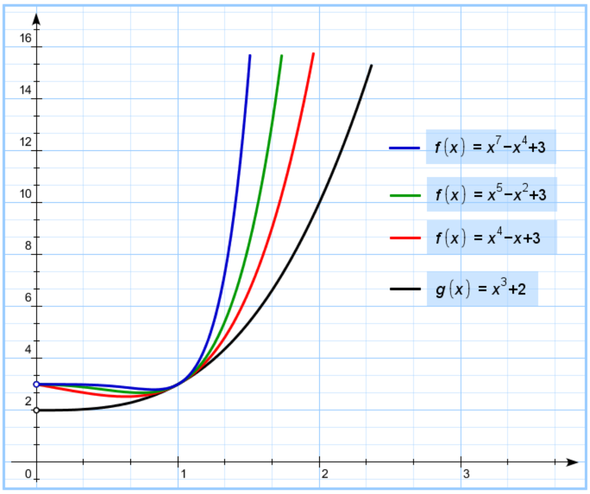
$$\min_{a,b,c>0}\left(\frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2}{2} - 12 = f(x_1; x_2; x_3).$$

Пример 34. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $ab+bc+ca=3$. Докажите неравенство

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) \geq 27.$$

Решение. Положим $f_1(x) = x^7 - x^4 + 3$, $f_2(x) = x^5 - x^2 + 3$, $f_3(x) = x^4 - x + 3$, $g_1(x) = k_1x^3 + m_1$, $g_2(x) = k_2x^3 + m_2$, $g_3(x) = k_3x^3 + m_3$, где $x>0$. Заметим, что при $a=b=c=1$ наше неравенство обращается в равенство. Поэтому числа k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3 выберем таким образом, что $f_1(1) = g_1(1)$, $f_1'(1) = g_1'(1)$, $f_2(1) = g_2(1)$, $f_2'(1) = g_2'(1)$, $f_3(1) = g_3(1)$, $f_3'(1) = g_3'(1)$. Однако $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 3$ и $f_1'(1) = f_2'(1) = f_3'(1) = 3$, следовательно, $g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = x^3 + 2$. А поскольку неравенства $(x-1)^2(x^2+x+1)\geq 0$ и $(x-1)^2(x^2+x+1)(x+1)\geq 0$ справедливо для всякого $x>0$, то выполнены следующие неравенства (см. рис. 30)

$$x^7 - x^4 + 3 \geq x^5 - x^2 + 3 \geq x^4 - x + 3 \geq x^3 + 2.$$



(Рис. 30)

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и известное неравенство

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),$$

получим

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^4 - c + 3) \geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) =$$

$$= (a^3 + 1^3 + 1^3)(1^3 + b^3 + 1^3)(1^3 + 1^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3 \geq$$

$$\geq \left(3(ab + bc + ca)\right)^{\frac{3}{2}} = 27.$$

Необходимо отметить, что неравенство $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ является верным, так как оно представимо в виде

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

8. Однородные неравенства

Пример 35. (Молдова, 2004) Докажите, что для любых чисел a, b, c≥0 выполнено следующее неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

Решение. Если хотя бы одно из чисел a, b, c равно 0, то требуемое неравенство является верным, т.к. левая его часть – неотрицательна, а правая в этом случае совпадает с 0. Далее положим, что числа a, b, c являются положительными.

Поскольку наше неравенство является однородным порядка 3, то его достаточно доказать в случае abc=1. В этом случае оно запишется в следующем виде

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^{1,5} + b^{1,5} + c^{1,5}. \quad (28)$$

Как нетрудно заметить, неравенство (28) обращается в равенство при a=b=c=1. Пусть $f(x) = x^3 - x^{1,5}$, x>0. Составим уравнение касательной в точке x_0=1:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1{,}5(x-1) = 1{,}5(x-1).$$

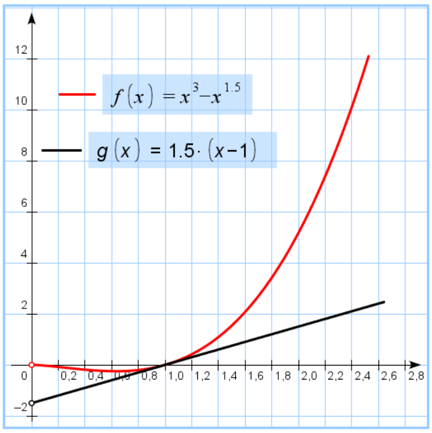


Рис.31

Поскольку неравенство (см. рис.31)

$$(x^{0,5} - 1)^2(x^2 + 2x^{1,5} + 3x + 3x^{0,5} + 1{,}5) \geq 0$$

справедливо при всех положительных x, то после раскрытия скобок и приведения подобных, получим следующее неравенство

$$x^3 - x^{1,5} \geq 1{,}5(x-1). \quad (29)$$

Применяя неравенство (29) и неравенство Коши, имеем

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^{1,5} - b^{1,5} - c^{1,5} \geq 1{,}5(a+b+c-3) \geq 4{,}5\left(\sqrt[3]{abc} - 1\right) = 0.$$

Откуда следует требуемое неравенство.

Пример 36. (Национальная математическая олимпиада Канады, 2002) Пусть даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c.$$

Решение. Ясно, что неравенство $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ является однородным порядка 1. Поэтому его достаточно доказать для случая $abc=1$. В этом случае оно запишется в виде

$$a^4+b^4+c^4-a-b-c\geq 0.$$

Положим $f(x)=x^4-x$, где x>0. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=1$:

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=3x-3.$$

Докажем, что для всякого x>0 справедливо неравенство (см. рис. 32)

$$x^4-x\geq 3x-3. \qquad (30)$$

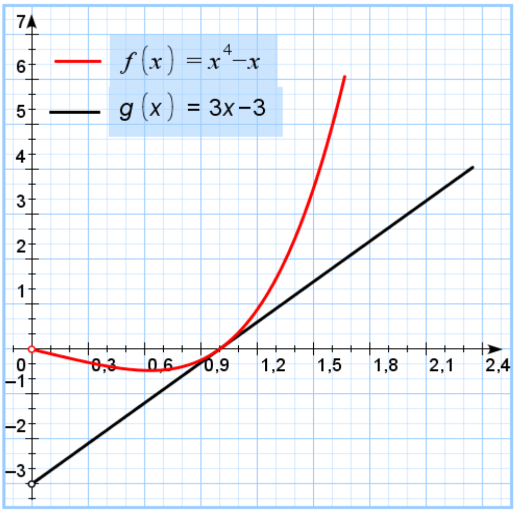


Рис. 32

Преобразуем неравенство (30) к следующему виду

$$(x-1)^2(\,x^2+2x+3)\geq 0.$$

Поскольку последнее выражение при положительных x принимает только неотрицательные значения, то неравенство (30) верно для всех положительных x. Применяя неравенство (30), в силу неравенства Коши $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ имеем,

$$a^4+b^4+c^4-a-b-c\geq 3(a+b+c)-9\geq 0.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Пример 37. (Национальная математическая олимпиада США, 2003). Пусть даны неотрицательные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Решение. Поскольку требуемое неравенство является однородным, то его достаточно доказать в случае, когда $a+b+c=3$. В этом случае наше неравенство запишется в следующем виде

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8.$$

Пусть $f(x)=\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$, где $x\in(0;\ 3)$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=1$:

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}(x-1)=\frac{4(x+1)}{3}.$$

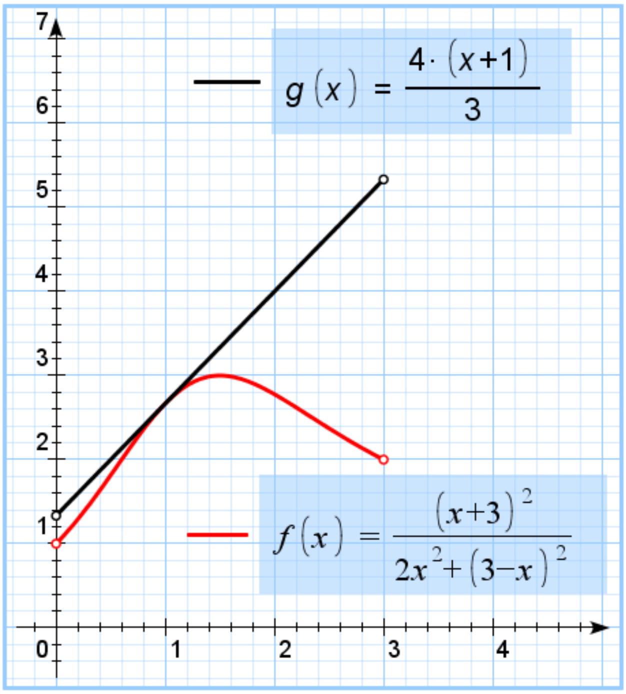


Рис. 33

Заметим, что неравенство (см. рис. 33)

$$\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}\le\frac{4(x+1)}{3} \qquad (31)$$

является верным для всякого $x\in(0;\ 3)$, так как оно эквивалентно неравенству $(4x+3)(x-1)^2\ge 0$. Применяя неравенство (31) при x соответсвенно равным положительным числам a, b и c, сумма которых равна 3, получим

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le\frac{4(a+b+c)+12}{3}=8.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

9. Нестандартные касательные

Пример 38. Пусть даны неотрицательные числа *a, b, c, d, e* такие, что $\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1$. Докажите, что

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\le 1.$$

Решение. Положим $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$, $g(x)=\frac{k}{4+x}+m$, где $x\ge 0$. Числа k и m выберем таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. Отсюда, $k=-3$, $m=0{,}8$.

Поскольку неравенство $\frac{x}{4+x^2}\le\frac{4}{5}-\frac{3}{4+x}$ эквивалентно неравенству $(x-1)^2(x+1)\ge 0$, то оно является верным для всякого $x\ge 0$ (см. рис.34).

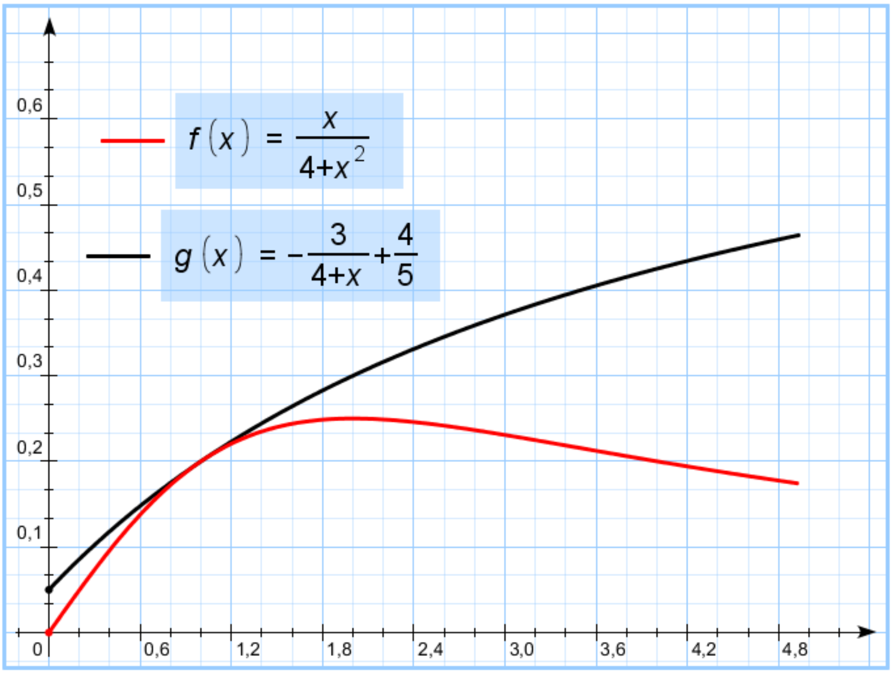


Рис. 34

Применяя это неравенство, получим

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\le 4-3\left(\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}\right)=1.$$

Что и требовалось доказать.

10. Комбинирование различных приемов

Пример 39. (США, 2002) Пусть даны положительные числа *a, b, c*. Докажите неравенство

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3.$$

Решение. Положим $f(x)=x^5-x^2+3$, $g(x)=kx^3+m$, где $x>0$. Заметим, что при $a=b=c=1$ наше неравенство обращается в равенство. Поэтому числа k и m выберем таким образом, что $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$. То есть 3=*k*+*m*, 3=3*k*. Отсюда, *k*=1, *m*=2 и $g(x) = x^3 + 2$. Неравенство (см. рис. 35)

$$x^5 - x^2 + 3 \geq x^2 + 2 \tag{32}$$

справедливо для всякого $x>0$, так как оно представимо в виде

$$(x-1)^2(x^3+2x^2+2x+1) \geq 0.$$

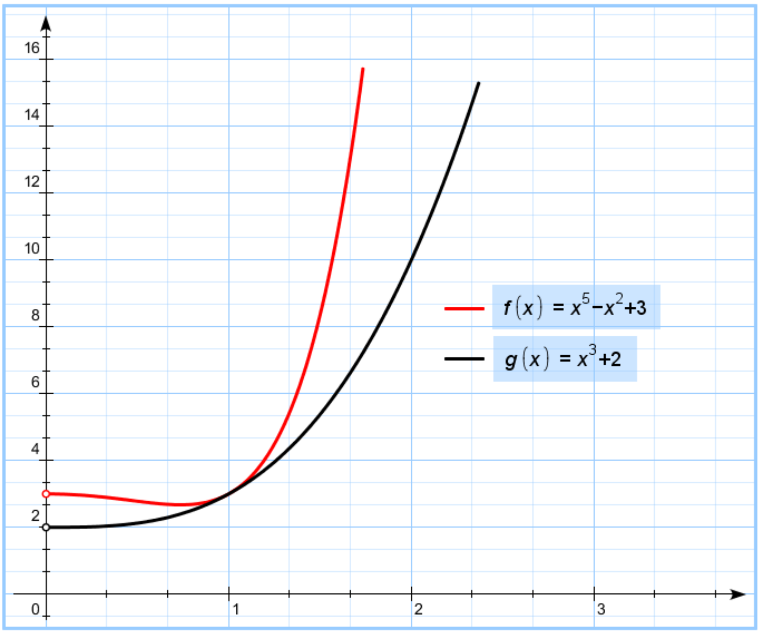


Рис. 35

Применяя неравенство (32) и неравенство Гельдера, получим

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) =$$

$$= (a^3 + 1^3 + 1^3)(1^3 + b^3 + 1^3)(1^3 + 1^3 + c^3) \geq (a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c)^3.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 40. Пусть даны положительные числа *a*, *b*, *c*. Докажите неравенство $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$.

Решение. Поскольку исходное неравенство однородное порядка 0, то его достаточно доказать в случае, когда $a^2+b^2+c^2=3$ и $0<a, b, c<\sqrt{3}$. В этом случае в силу неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным нескольких чисел имеем

$$a + b + c \leq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = 3,\ (b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2) = 2(3-a^2),$$

$$(a+b)^2 \leq 2(3-c^2),\ (a+c)^2 \leq 2(3-b^2).$$

Отсюда,

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq$$

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+2(3-a)(3-a^2)}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+2(3-b)(3-b^2)}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+2(3-c)(3-c^2)}}. \qquad (33)$$

Пусть $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+2(3-x)(3-x^2)}}$, $g(x)=kx^2+m$, где $x\in(0;\sqrt{3})$. Выберем числа k, m таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть числа k и m удовлетворяют следующим равенствам $k+m=\frac{1}{3}$, $2k=\frac{2}{3}$. Следовательно, $g(x)=\frac{x^2}{3}$. Заметим, что на множестве $(0;\sqrt{3})$ неравенство

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{3x^3-6x^2-6x+18}}\geq\frac{x^2}{3}=g(x) \qquad (34)$$

эквивалентно неравенству

$$(x^2-3)(x-1)^2\leq 0,$$

которое для всех $x\in(0;\sqrt{3})$ является верным (см.рис.36). Следовательно, и неравенство (34) верно на указанном множестве.

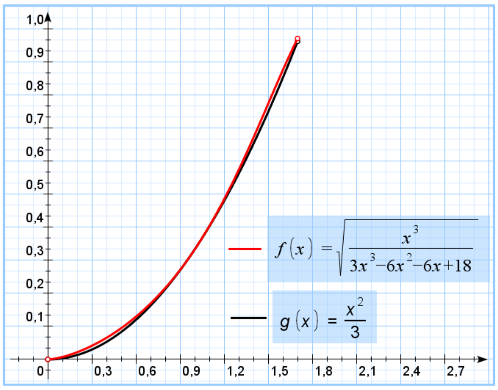


Рис 36.

Применяя неравенства (33) и (34), получим

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=1.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

Пример 41. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что a+b+c=1. Докажите неравенство

$$(a+b)^2(1+2c)\left(2+\frac{3c}{a}\right)\left(2+\frac{3c}{b}\right)\geq 54c.$$

Решение. Согласно неравенству Коши $(a+b)^2\geq 4ab$ и условию задачи имеем

$$(a+b)^2(1+2c)\left(2+\frac{3c}{a}\right)\left(2+\frac{3c}{b}\right)=(1-\mathrm{c})^2(1+2c)\left(4+\frac{6c(1-c)+9c^2}{ab}\right)\geq$$

$$\geq(1-\mathrm{c})^2(1+2c)\left(4+\frac{4(3c^2+6c)}{(1-\mathrm{c})^2}\right)\geq 4(1+2c)(4c^2+4c+1)=4(1+2c)^3. \qquad (35)$$

Составим уравнение касательной к графику функции $f(x)=4(1+2x)^3$ в такой точке $x_0\in(0;1)$, что $f'(x_0)=54$. Т.е. x_0 удовлетворяет равенству

$$24(1+2x_0)^2=54.$$

Отсюда, $x_0=\frac{1}{4}$. Следовательно, уравнением касательной будет

$$y=f\left(\frac{1}{4}\right)+f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{2}+54\left(x-\frac{1}{4}\right)=54x.$$

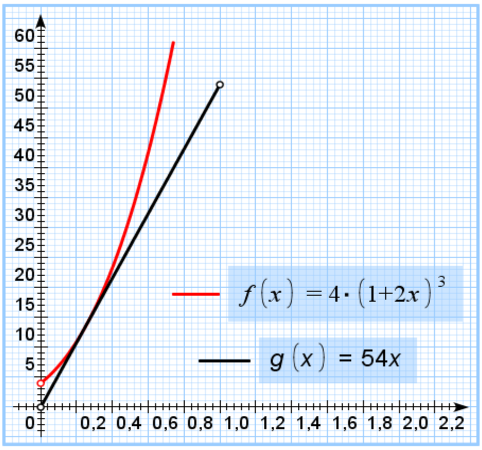


Рис.37

А поскольку $f''(x)=96(1+2x)>0$, x>0, то функция f является на промежутке (0;+∞) выпуклой вниз, значит, графику функции лежит не ниже касательной y=54x (см.рис.8). То есть для любого x>0 выполнено $4(1+2x)^3\geq 54x$. Отсюда и из неравенства (35) следует требуемое.

Пример 42. (Pham Kim Hung) Пусть даны неотрицательные числа a, b, c, d. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Решение. Согласно неравенству Коши-Шварца имеем

$$\left(\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\right)(a+b+c+d)\geq$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}}+\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2.$$

Поэтому нам достаточно доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}}+\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}} \geq 2. \quad (36)$$

Поскольку неравенство (36) является однородным порядка 0, то его достаточно доказать для случая $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. В этом случае оно запишется в следующем виде

$$\frac{a}{\sqrt{4-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{4-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{4-c^2}}+\frac{d}{\sqrt{4-d^2}} \geq 2. \quad (37)$$

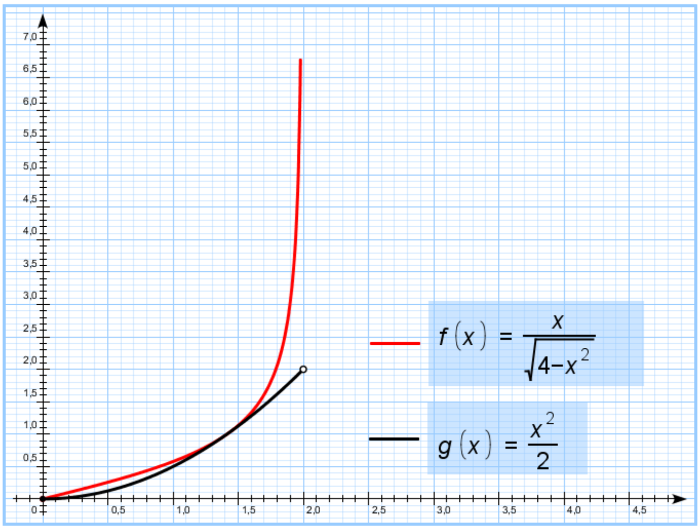


Рис. 38

Положим $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $g(x)=kx^2+m$, где $0\leq x<2$. Заметим, что неравенство (37) обращается в равенство при $a=b=\sqrt{2}$, $c=d=0$. Поэтому числа k и m выберем таким образом, что $f(0)=g(0)$, $f(\sqrt{2})=g(\sqrt{2})$, $f'(\sqrt{2})=g'(\sqrt{2})$. Не трудно убедиться, что указанным условиям удовлетворяет только функция $g(x)=\frac{x^2}{2}$, причем для всякого $x\in[0;\,2)$ справедливо неравенство $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\geq\frac{x^2}{2}$ (см. рис. 38), так как оно эквивалентно неравенству $x^2(x^2-2)^2\geq 0$. Следовательно,

$$\frac{a}{\sqrt{4-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{4-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{4-c^2}}+\frac{d}{\sqrt{4-d^2}} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=2.$$

Откуда следует требуемое неравенство.

11. Секущие

Пример 43. (Baltic Way, 2006, задача 2, метод вспомогательного неравенства) Пусть даны числа $a_k \in [-2; 17]$, k=1, 2, …, 59 такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{59} = 0$. Докажите неравенство $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{59}^2 \leq 2006$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$, $x \in [-2; 17]$. Поскольку функция f на промежутке [-2; 17] является выпуклой вниз, то на этом промежутке её график лежит ниже секущей, проходящей через точки (-2; 4) и (17; 289), уравнением которой является

$$y = 15x + 34\,.$$

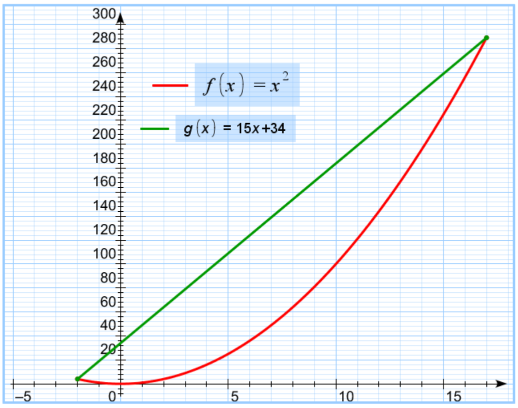


Рис. 39

Т.е. для каждого $x \in [-2; 17]$ справедливо неравенство (см. рис.39)

$$x^2 \leq 15x + 34. \qquad (38)$$

Применяя неравенство (39), получим

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{59}^2 \leq 15(a_1 + a_2 + \ldots + a_{59}) + 34 \cdot 59 = 2006.$$

Тем самым требуемое неравенство доказано.

Пример 44. (Санкт-Петербургская мат. олимпиада, 1988, 8 класс, задача 2б) $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{1 - x_1}{1 + x_1} \cdot \frac{1 - x_2}{1 + x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - x_n}{1 + x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

Решение. Поскольку сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна $\frac{1}{2}$, то каждое из этих чисел не превосходит 0,5. Значит, для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ число $\frac{1-x_k}{1+x_k}$ является положительным. Следовательно, наше неравенство эквивалентно неравенству

$$\ln\frac{1 - x_1}{1 + x_1} + \ln\frac{1 - x_2}{1 + x_2} + \ldots + \ln\frac{1 - x_n}{1 + x_n} \geq -\ln 3.$$

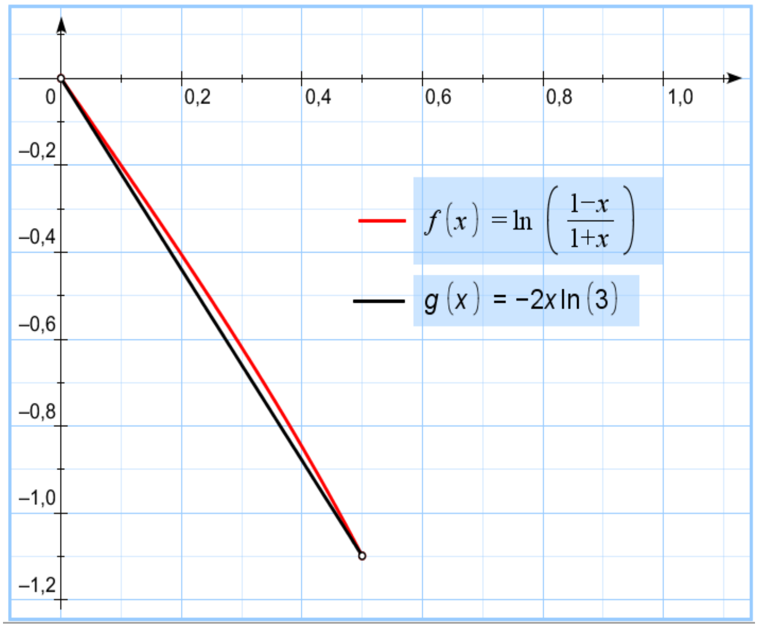


Рис. 40

Положим $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$, где $0 \le x \le 0{,}5$. Заметим, что $f''(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} < 0$. Следовательно, функция f является выпуклой вверх на промежутке [0; 0,5]. Значит, график функции f лежит не ниже секущей проведенной через точки (0;0) и $(0{,}5; ln3)$, то есть для всякого $x \in [0; 0{,}5]$ справедливо неравенство (см. рис. 2)

$$\ln\frac{1-x}{1+x} \ge -2x\ln 3.$$

Отсюда,

$$\ln\frac{1-x_1}{1+x_1} + \ln\frac{1-x_2}{1+x_2} + \ldots + \ln\frac{1-x_n}{1+x_n} \ge -2\ln 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -\ln 3,$$

откуда следует требуемое.

Список литературы

1. Агаханов Н.Х. и др. *Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: Заключительные этапы*. - М.: МЦНМО, 2010.
2. Берлов С.Л., Петров Ф.В., Смирнов А.В. Петербургские математические олимпиады 2011 года – М.: МЦНМО, 2012.
3. Гаврилов В.И., Субботин А.В. Изложение темы «выпуклые функции» в университетском курсе математического анализа// Математика в высшем образовании. 2003. №1. С. 21-28.
4. Коровкин П.П. Неравенства. – М.: Наука, 1966.
5. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 256 с.
6. Фомин Д.В., Кохась К.П. Петербургские математические олимпиады, 1961-1993. - СПб.: Лань, 2007.
7. Чучаев И.И. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений. – Саранск: изд-во Мордов. ун-та, 2001. 168 с.
8. Шабунин М.И. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.
9. Chetkovski Z. *Inequalities. Theorems, techniques and Problems.* – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
10. Manfiro R.B., Gomes Ortega J.A., Delgado R.V. Inequalities. *A mathematical Olympiad Approach*. – Basel. Boston. Berlin: Birkäuser, 2009.
11. Li K. Using tangent lines to prove inequalities// Mathematical Excalibur. 2005-2006. V.10. No.
12. Liu A. *Chinese mathematics competitions and Olympiads* 1981-1993. – Australia: Australian Mathematics Trust. 1998.
13. Pham Kim Hung *Secrets in Inequalities* (*volume* 1). – Zalău : Gill. 2007.
14. Suppa E. *Inequalities from around the world* 1995-2005. Teramo, 2011. 157 p.
15. http://www.artofproblemsolving.com
16. http://www.balticway-2011.de
17. http://www.hms.gr/16jbmo2012/main.htm
18. http://www.georgmohr.dk/bw/bw06sol.pdf

Заключения

1. Заключение Проекта

В настоящем проекте выполнено следующее

- ✓ показано, что даже среди многочленов третьей степени существует бесконечно много не выпуклых функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена в заданной точке;
- ✓ найдены две неустранимые ошибки в доказательстве неравенств у Четковского З. (Chetkovski Z.) и Саппа Э. (Suppa E.);
- ✓ разработан новый метод доказательства неравенств, который получил название «метод отделяющих касательных» на XXI Международной Конференции «Математика. Образование», г.Чебоксары, Россия, об эффективности предлагаемого метода можно судить хотя бы на основании того, что в книгах Pham Kim Hung (Secrets in Inequalities) и Chetkovski Z. (Inequalities) неравенства подходящего типа встречаются примерно в 20% случаях, из них в 70% применим указанный метод;
- ✓ существенно расширен класс функций, для которых справедливо неравенство Йенсена в некоторой фиксированной точке;
- ✓ предложены альтернативные доказательства 44 неравенств из различных международных олимпиад и книг для подготовки к ним, необходимо отметить, что в общем подготовлены доказательства 80 неравенств, но в Проекте представлены только те доказательства, которые либо были опубликованы авторами данного проекта, либо в данный момент находятся на рассмотрении журналов.

Материал Проекта был представлен на следующих семинарах и конференциях:

1) 28 мая 2013 года – XXI Международная Конференция «Математика. Образование», г.Чебоксары, Россия,

Доклад: Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. «Об одном методе доказательства неравенств».

2) 24 июня 2013 года – семинар Международного математического лагеря «Формула единства 2013», г. Санкт-Петербург

Доклад (на английском языке): Лепес А.Н. «Об одном методе доказательства неравенств».

3) 13 августа 2013 года – выездной семинар Любомир Любенова (учитель математики, г. Стара Загора, Болгария)

Доклад: Лепес А.Н. «Метод отделяющих касательных».

4) 30 сентября 2013 года – семинар «Дидактическое моделирование» Института математики Болгарской академии наук.

Доклад: Лепес А.Н. «О применении метода отделяющих касательных для доказательства неравенств».

Материал Проекта может быть полезен как на кружковых занятиях, так и специалистам, область научных интересов которых связана с неравенством Йенсена.

На данный момент некоторая часть проекта опубликована в четырех статьях

1) Чебоксары, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Об одном методе доказательства неравенств // Труды XXI конференции «Математика. Образование». 2013. 16 стр. (в печати);

2) София, Болгария

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Application of the method of separating tangents to prove inequalities // Didactical Modeling: e-journal 2013. URL: http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/index.htm. 13 pages (в печати);

3) Гонконг, Китай

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Using tangent lines to prove inequalities (part II) // Mathematical Excalibur. 2013-2014. V.1. 6 pages. (в печати);

4) Москва, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Применение касательной для доказательства неравенств // Математика в школе. 2014. 13 стр. (в печати).

2. Заключение научного руководителя

Проект «Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных» состоит из трех глав. Общий объем – 72 страниц.

В первой главе имеется описание постановки задачи, обоснование задачи, описание гипотезы, цели, объекта Проекта, описание методологии, сравнительный анализ предлагаемых доказательств в Проекте и ранее опубликованных, а также библиографический обзор. Необходимо отметить, что поводом для написания данного Проекта послужил тот факт, что на последней (X) Международной Жаутыковской олимпиаде (13 – 19 января 2013 года) необходимое неравенство доказал только один ученик из 159 участников. При этом в обоих решениях, предложенных жюри, использовались только известные неравенства такие, как неравенство Коши и Коши-Буняковского. Это и многое другое заставило задуматься о причинах подобного. В связи с этим мной было поручено А.Лепесу провести анализ и других олимпиад на предмет доступности решения для учащегося. Оказалось, что подобная картина в той или иной степени встречается на многих олимпиадах. А.Лепесом было выдвинуто предположение, что несмотря на то, что в официальных решениях используются в основном классические неравенства, для их применения необходимо каждый раз придумывать нестандартные преобразования. Отсюда, естественно, было два варианта дальнейшего развития Проекта: провести полную систематизацию всех нестандартных преобразований, используемых для доказательства неравенств, или выделить некоторый класс неравенств, для которых можно было бы предложить общий метод, не требующий изобретения нестандартных преобразований. Первое оказалось не реализуемо в рамках отведенного времени, поэтому мы остановились на втором. Однако А.Лепес провел некоторую систематизацию подобных нестандартных преобразований (см. глава 1, параграф 8, таблица сравнений №1). Поскольку мы не старались придумывать нестандартные преобразования, то для доказательства неравенств с несколькими переменными было предложено создавать вспомогательные неравенства с одной переменной. Конечно, далеко не для всех неравенств подобное возможно. Позже выяснилось, что данное возможно примерно в 20% случаев, что весьма неплохо. Мы также старались не использовать классические неравенства, что привело А.Лепеса к одному интересному наблюдению. После эквивалентных преобразований вспомогательных неравенств, получались многочлены, у которых в определенной точке имели корень не менее, чем второй кратности. Причем эти корни и были теми числами, при которых требуемое неравенство обращалось в равенство. На первый взгляд, это могло быть случайностью, но как показано А.Лепесом в теореме 2 для рациональных функций по-другому и быть не могло. Пытаясь найти алгоритм построения необходимых вспомогательных неравенств, мы наткнулись на рекомендации Фам Ким Хунга. Однако в его книге было недостаточно задач на применения указанных рекомендаций и не было объяснений выбора коэффициента через равенство производных в точке 1. В связи с этим мной было поставлена задача: необходимо ли требовать равенство производных между функцией и её касательной в некоторой точке. Положительный ответ для рациональных функций на указанный вопрос был сформулирован А.Лепесом в теореме 1. Постепенно накапливая банк доказательств неравенств, которые не требовали нестандартных преобразований, мы пришли к выводу, что многие из них так или иначе связаны с неравенством Йенсена при некоторых ограничениях на переменные. Для наглядности было решено к каждому решению приводить соответствующий рисунок между функций и её касательной. Это помогло заметить, что многие функции были не выпуклыми. Поэтому возник вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы для нее было выполнено неравенство Йенсена. А.Лепесом были найдены некоторые достаточные условия (см. теоремы 3 и 4), которые, оказались, имеют наглядный геометрический смысл, заключающийся в том, что графики таких функций лежат не ниже касательной, если не на всей области определения, то там, где они лежат ниже касательной, значения функции должны быть достаточно большими. Для расширения спектра задач А.Лепесом были доказаны также теоремы 5 и 6. И последний вопрос, который оставался открытым после сделанных наблюдений: конечно или бесконечно множество выпуклых функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена в заданной точке. Удивительно, что А.Лепесу удалось не просто показать, что множество таких функций бесконечно, но и то, что их бесконечно много даже среди многочленов третьей степени. Обобщая накопленный опыт, был сформулирован новый метод доказательства неравенств: метод отделяющих касательных, название к которому было взято по аналогии с методом отделяющих констант. Поскольку он являлся некоторым обобщением последнего. В общем, в Проекте приведено доказательство к 44 неравенствам. Все доказательства неравенств получены А.Лепесом самостоятельно. А.Лепес также осуществил сравнительный анализ доказательств свыше 700 неравенств на предмет наличия решений схожих с теми, которые получаются методом отделяющих касательных. На основе этого анализа (см. глава 1, параграф 8, таблица сравнений №2) можно констатировать, что метод отделяющих касательных у других авторов либо встречается не более, чем в трех задачах, причем в простейшем случае – касательная прямая, либо в 6 задачах (Фам Ким Хунг) в случае логарифмической касательной. И к созданию общего метода для указанных типов неравенств впервые предпринята попытка в настоящем Проекте.

Данный Проект может быть полезен на факультативных, кружковых занятиях как олимпийского резерва, так и обычных классов. Уникальность метода отделяющих касательных является доступность (не требуется знание специальных неравенств, достаточно стандартной программы второго полугодия 10 классов), массовость (метод отделяющих касательных применим примерно для 70% неравенств, связанных с неравенством Йенсена), простота решения (решение каждой задачи занимает не более половины страницы), алгоритмичность (имеются рекомендации, охватывающие большинство случаев, встречающихся на практике), наглядность (построение графиков функций и их касательных помогает во многом как понять структуру доказательства, так и выявить наличие особых случаев). Планируется издать методическое пособие (рабочее название): «Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных».

Научный руководитель И.Ж.Ибатулин