Условия существования треугольника с заданными длинами сторон и целыми координатами вершин

М.В.Блудов*

В 2012 г. К.А. Кноп предложил следующую задачу: "Докажите, что существует бесконечно много треугольников со сторонами вида $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$ и $\sqrt{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ и целыми координатами вершин"[1]. Здесь и далее рассматриваются только треугольники на плоскости и только прямоугольная декартова система координат.

Очевидно, что необходимым условием для существования треугольника с заданными сторонами a, b, c и целыми координатами вершин является $2S \in \mathbb{N}$, где S - площадь треугольника (что следует, например, из формулы Пика).

По формуле Герона имеем: $S = \frac{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4}$. При $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, $c = \sqrt{z}$, $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ получим

$$S = \frac{\sqrt{2xy + 2yz + 2xz - x^2 - y^2 - z^2}}{4}. \qquad (1)$$

Если стороны равны $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+k}$, $\sqrt{n+m}$, то запись формулы аналогична.

Для некоторых задач такого вида условия на полуцелую площадь S и целые квадраты сторон оказываются достаточными для существования треугольника с целыми координатами вершин.

Определение. Назовем n-подходящим треугольник с целыми координатами вершин и длинами сторон $\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$.

Рассмотрим площадь n-подходящего треугольника. Подставим длины его сторон в формулу (1)

$$S = \frac{\sqrt{2n^2 + 4n(n+1) - 2n^2 - (n+1)^2}}{4}.$$

*Блудов Михаил Васильевич, МОУ Лицей №2 г. Иркутска, 9 класс. Руководитель: Воронов Всеволод Александрович, к.т.н., ИДСТУ СО РАН.

$$16S^2 = 3n^2 + 2n - 1. \tag{2}$$

Теорема 1. Для существования n-подходящего треугольника необходимо и достаточно, чтобы число $3n^2+2n-1$ являлось квадратом четного числа.

Необходимость.

Известно, что $q = 2S \in \mathbb{N}$, поэтому из формулы (2) получаем

$$16S^2 = (2q)^2 = 3n^2 + 2n - 1.$$

Достаточность.

Рассмотрим уравнение Пелля

$$u^2 - 3v^2 = 1. \tag{3}$$

Для его решений (u_r, v_r) справедлива формула [2]:

$$(2 + \sqrt{3})^r = u_r + v_r\sqrt{3}. \tag{4}$$

Докажем три леммы о решениях уравнения (3).

Лемма 1.

Пусть u, v - решения уравнения (3) и $n = (u + 2v)^2 + v^2$. Тогда треугольник с координатами вершин $(0; 0)$, $(u + 2v; v)$, $(v; u + 2v)$ является n-подходящим.

Доказательство леммы 1.

$$(u + 2v)^2 + v^2 + 1 = 2(v + u)^2$$

$u^2 + 4uv + 4v^2 + v^2 + u^2 - 3v^2 = 2v^2 + 4vu + 2u^2$ - верное тождество, следовательно треугольник имеет квадраты сторон вида n, n, $n+1$ и целые координаты вершин, следовательно является n-подходящим и, следовательно, лемма 1 доказана.

Лемма 2.
Для решений уравнения (3) выполняются следующие тождества:

$$\frac{2u_{2k+1} - 1}{3} = (u_k + 2v_k)^2 + v_k^2 \tag{5}$$

$$v_{2k+1} = (u_k + 2v_k)^2 - v_k^2 \qquad (6)$$

Доказательство леммы 2.

Используя (4), запишем

$$u_{2k+1} + \sqrt{3}v_{2k+1} = (2+\sqrt{3})(u_k + \sqrt{3}v_k)^2 = (u_k^2 + 3v_k^2 + 2\sqrt{3}u_k v_k)(2+\sqrt{3}) =$$

$$= 2u_k^2 + 6v_k^2 + 6u_k v_k + \sqrt{3}(u_k^2 + 3v_k^2 + 4u_k v_k).$$

Докажем (5):

$$u_{2k+1} = 2u_k^2 + 6v_k^2 + 6u_k v_k;$$

$$2u_{2k+1} - 1 = 4u_k^2 + 12v_k^2 + 12u_k v_k - 1;$$

$$2u_{2k+1} - 1 = 3u_k^2 + 15v_k^2 + 12u_k vk;$$

$$\frac{2u_{2k+1} - 1}{3} = u_k^2 + 5v_k^2 + 4u_k v_k;$$

$$\frac{2u_{2k+1} - 1}{3} = (u_k + 2v_k)^2 + v_k^2.$$

Докажем (6):

$$v_{2k+1} = u_k^2 + 3v_k^2 + 4u_k v_k;$$

$$v_{2k+1} = (u_k + 2v_k)^2 - v_k^2.$$

Тождества доказаны и, следовательно, лемма 2 доказана.

Лемма 3.

$$u_k \equiv (-1)^k \pmod{3}. \qquad (7)$$

Доказательство леммы 3.

$$(2+\sqrt{3})^r = C_r^0 2^r + C_r^1 2^{r-1}\sqrt{3} + C_r^2 2^{r-2}\sqrt{3}^2 + ... + C_r^{r-2} 2^2 \sqrt{3}^{r-2} + C_r^{r-1} 2\sqrt{3}^{r-1} + C_r^r \sqrt{3}^r.$$

Все целые слагаемые, кроме первого, делятся на 3, откуда

$$u_k \equiv 2^k \equiv (-1)^k \pmod{3}.$$

Лемма 3 доказана.

Утверждение 1.

Пусть n_0, n_1, n_2,... - все n, удовлетворяющие условию теоремы (в порядке возрастания). Тогда $n_k = \frac{2u_{2k+1}-1}{3}$.

Доказательство утверждения 1.

Запишем условие теоремы 1.

$$3n^2 + 2n - 1 = (2q)^2$$

Преобразуем к уравнению Пелля:

$$3(2q)^2 = 9n^2 + 6n - 3,$$

$$(3n+1)^2 - 3(2q)^2 = 4. \tag{8}$$

Формула (8) — уравнение Пелля вида $x^2 - 3y^2 = 4$.

Рассмотрим $x^2 - 3y^2$. Рассмотрев все варианты четности для x и y, получаем, что, чтобы разность чисел делилась на 4, необходимо, чтобы и x, и y делились на 2. Поделим уравнение (8) на 4. Получим

$$u = \frac{x}{2}, \quad v = \frac{y}{2}.$$

Уравнение (8) пришло к виду (3); Тогда $x = 2u$, $y = 2v$.

$$n = \frac{2u_i - 1}{3},$$

где u_i, $i = 0, 1, 2, ...$ – коэффициенты решений (3). Заметим, что $n \in \mathbb{N}$ при $i = 2k+1$ (по лемме 3), $n_k = \frac{2u_{2k+1}-1}{3}$, $k = 0, 1, 2...$

Утверждение 1 доказано.

Из леммы 2 следует, что $n_k = (u_k + 2v_k)^2 + v_k^2$, из леммы 1 треугольник с координатами вершин $(0;0)$, $(u_k + 2v_k; v_k)$, $(v_k; u_k + 2v_k)$ является n-подходящим, а его квадраты сторон равны n_k, n_k, $n_k + 1$, что завершает доказательство достаточности.

Следствие. Для того, чтобы каждое из чисел n и $n+1$ было представимо в виде суммы 2 квадратов целых чисел, достаточно, чтобы $3n^2+2n-1$ являлось квадратом целого числа.

Можно доказать, что аналог Теоремы 1 справедлив и для треугольников из исходной задачи К. А. Кнопа, однако выкладки получаются более громоздкими. Сформулируем некоторые обобщения.

Гипотеза 1 Для того, чтобы каждое из натуральных чисел a, b и c было представимо в виде суммы 2 квадратов целых чисел, достаточно, чтобы $2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2$ являлось квадратом целого числа.

Гипотеза 2. Для существования треугольника с целыми координатами вершин и сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, где $a, b, c \in \mathbb{N}$, необходимы и достаточны следующие два условия:

1. $2S \in \mathbb{N}$,
2. НОД$(a, b, c) = l^2$, $l \in \mathbb{N}$.

Автор благодарит рецензента за замечания, которые помогли написать более внятный текст работы, и А.Б. Скопенкова за проведенную консультацию.

Список литературы

[1] knop.livejournal.com/310791.html

[2] А.В. Спивак. Уравнения Пелля. Квант, 2002, №4. С. 5-11. kvant.mccme.ru/pdf/2002/04/kv0402spivak.pdf