О некоторых экстремальных прямых

Ипатова Виктория

Научный руководитель: Привалов А.А.

Постановка задачи

Пусть имеется n точек $\{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ $(n>2)$ на плоскости. Требуется

- Найти прямую l, с наименьшей суммой расстояний до этих точек.
- Найти прямую l, наименее уклоняющуюся от этих точек, т.е. такую, что

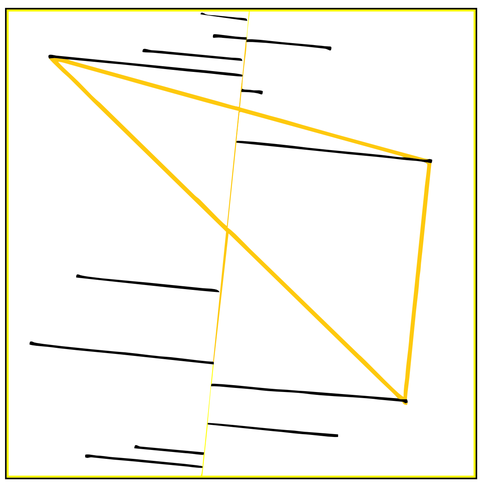
$$\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l)\le\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l_1)$$

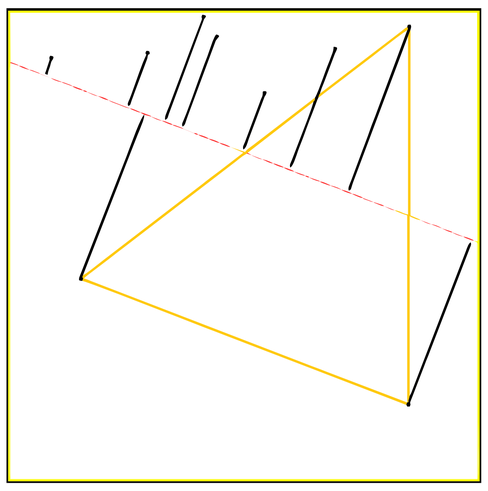
где $\rho(A,l)$ – расстояние от точки A до прямой, l_1 – произвольная прямая на плоскости.

- Найти прямую l, с наименьшей суммой квадратов расстояний до этих точек.

Теорема 2.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ на плоскости существуют такие три точки A, B, C, что наименее уклоняющаяся от $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ прямая l содержит среднюю линию треугольника ABC.





Доказательство.

Пусть l – наилучшая прямая и

$$s_0=\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l)\le\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l_1),\quad\forall l_1 \qquad (1)$$

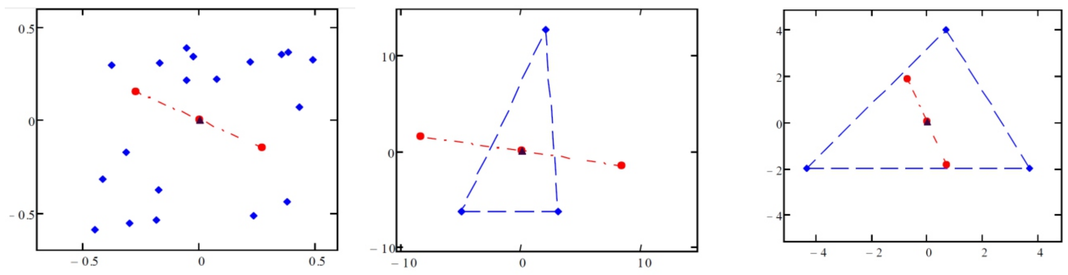
Для удобства изложения, представим себе, что эта прямая горизонтальная.

Понятно, что найдется точка, например, A_1 такая, что $s_0=\rho(A_1,l)$. Если других таких точек не существует, т.е. $\rho(A_i,l)<s_0$, $i=2, 3, \ldots, n$, то небольшим параллельным сдвигом прямой l к точке A_1 получим прямую l_1, не удовлетворяющую (1). Значит существует две точки, пусть A_1 и A_2 такие, что $s_0=\rho(A_1,l)=\rho(A_2,l)$. Если эти точки находятся по одну сторону от прямой и если при этом других таких точек не существует, то небольшим параллельным сдвигом прямой l к точке A_1 получим прямую l_1, не удовлетворяющую (1). Если эти точки находятся по разные стороны и если при этом других таких точек не существует, то небольшим поворотом вокруг точки $B=\frac{A_1+A_2}{2}$, получим прямую l_1, также не удовлетворяющую неравенству (1). То же самое произойдет для трех точек (пусть A_1, A_2 и A_3, $s_0=\rho(A_1,l)=\rho(A_2,l)=\rho(A_3,l)$ и $\rho(A_i,l)<s_0$, $i=3, \ldots, n$), из которых две (A_1 и A_2) лежат над (под) прямой l, а третья A_3 – под l и правее A_1 и A_2 (в этом случае поворот вокруг $B=\frac{A_1+A_3}{2}$ или $B=\frac{A_2+A_3}{2}$).

Следовательно, найдутся три точки, например, A_1, A_2 и A_3, что $s_0=\rho(A_1,l)=\rho(A_2,l)=\rho(A_3,l)$ и расположены они попеременно над и под прямой l. Не сложно видеть, что эта прямая проходит через среднюю линию треугольника $A_1A_2A_3$. Теорема доказана.

Теорема 4.

Для любых точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ на плоскости существуют точки P_1, P_2 плоскости (не обязательно различные) и число $C = C(A_1,\ldots, A_n,P_1, P_2)$, такое что $|A_1l|^2+\ldots+|A_nl|^2=C$ для любой прямой l, проходящей через P_1 или P_2.



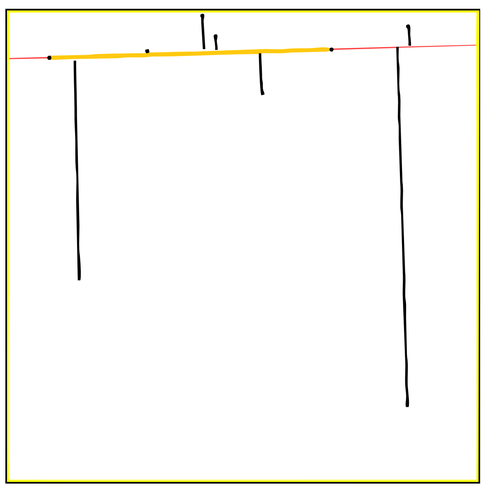
Теорема 5.

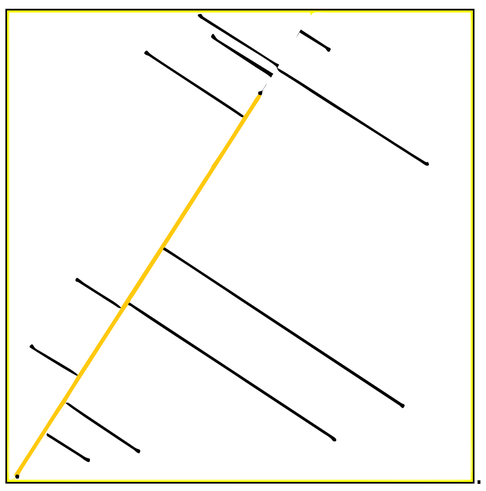
Если в теореме 4 для точек A_1, A_2, A_3 точки P_1 и P_2 совпадают ($P_1=P_2$), то треугольник $A_1A_2A_3$ правильный.

Теорему 5 нельзя обобщить на случай более трех точек (n>3).

Теорема 1.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ на плоскости существуют такие две точки, что для прямой l, проходящей через них, и любой другой прямой l_1 на плоскости, сумма расстояний от l до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ не больше суммы расстояний от l_1 до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$





Доказательство.

Введем координаты точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$: $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,\ldots n$. Тогда задача сводится к нахождению прямой l, при которой функция

$$S_1(\alpha,c,l)=\sum_{i=1}^{n}\rho(l,A_i)=\sum_{i=1}^{n}|y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha+c|$$

принимает минимальное значение. Эта функция двух переменных является непрерывной и ограниченной, значит, по теореме Вейерштрасса достигает своего минимального значения. То есть задача разрешима.

Пусть l – искомая прямая, т.е. $S_1(\alpha,c,l_1)\ge S_1(\alpha,c,l)$ (2) для любой прямой l_1. Обозначим $S_1(\alpha,c,l)=S_0$

Докажем, что тогда прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Введем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой l, ось ординат вдоль нормали к прямой l и центр совпадал с точкой (x_1,y_1). Очевидно, что некоторые из точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ лежат над прямой l, а некоторые под l (в противном случае l не наилучшая прямая).

$S_0=\sum_{+}y_i-\sum_{-}y_j$, где $\sum_{+}y_i$ сумма точек, лежащих выше координатной прямой, а $\sum_{-}y_j$ ниже

Предположим, что ни одна из точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ не лежит на l, т.е. на оси абсцисс. Докажем, что тогда наилучшее приближение S_0 можно уменьшить вращением прямой l вокруг начала координат (0,0) :

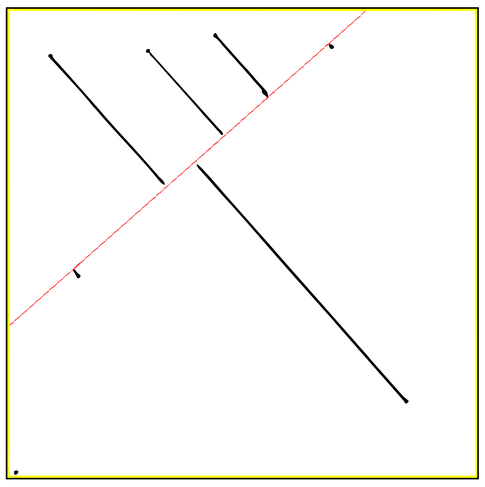
$$\sum_{i=2}^{n}\rho(l,A_i)=\sum_{i=2}^{n}|y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha|=\cos\alpha(\sum_{+}y_i-\sum_{-}y_j)-\sin\alpha(\sum_{+}x_i-\sum_{-}x_j)=S_0\cos\alpha-S_1\sin\alpha$$

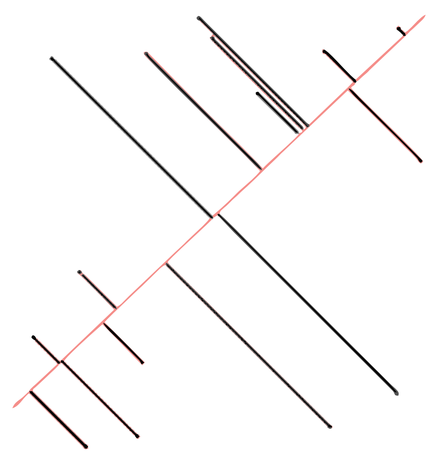
Где $S_1=\sum_{+}x_i-\sum_{-}x_j$. Теперь, если S_1 меньше нуля, то повернем l по часовой стрелки ($\alpha<0$); если это выражение неотрицательно, то – против часовой стрелки ($\alpha>0$); если же $S_1=0$, то крутим в любую сторону. Как не сложно видеть во всех случаях $S_1(\alpha,0)$ будет меньше S_0. Неравенство (2) нарушится и следовательно прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Аналогичные рассуждения, что прямая проходит через две точки из $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$.

Теорема 3.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ на плоскости существует такая прямая l, что для любой другой прямой l_1, сумма квадратов расстояний от l до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ не больше суммы квадратов расстояний от l_1 до точек $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$





Литература

[1] Препарата Ф., Шеймос М., Вычислительная геометрия: Введение, – М.: Мир, 1989

[2] Рудин У., Основы математического анализа, – М.: Мир, 1966

[3] Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986