

І. Введение.

В этой статье мы рассмотрим фигуру, называемую *циклическим четырёхсторонником* (см. далее). Про нее известно множество фактов, главные из которых будут приведены далее. Авторам же удалось найти как новые интересные теоремы, возникающие в данной конструкции, так и красивое геометрическое доказательство известного утверждения, связанного с циклическим четырехсторонником.

Напомним, что несколько прямых на плоскости находятся в *общем положении*, если никакие три из них не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.

Определение 1. Четырехсторонник (полный четырехсторонник) - это фигура, образованная четырьмя прямыми общего положения.

Комментарий. Четырехсторонник делит плоскость на несколько частей, лишь одна из которых является четырехугольником. Если этот четырехугольник вписан в окружность, то такой четырехсторонник называется *циклическим*. *Главным треугольником* называется треугольник, образованный любыми тремя из четырех прямых, образующих данный четырехсторонник. Таким образом, любой четырехсторонник имеет четыре главных треугольника.

Четырёхсторонник, как обычный, так и циклический, появляется во множестве задач и теорем. Например, известно, что если описать окружности около четырех главных треугольников, то они будут пересекаться в одной точке, называемой *точкой Микеля* (см. [2], задача 2.85а). Так же известно, что если взять ортоцентры тех же треугольников, то все они будут лежать на одной прямой, именуемой *прямой Обера* (см. [3], Глава 1, 48-49 п.) . Причем эта прямая будет перпендикулярна прямой, которую называют *прямой Гаусса* (см. [3], Глава 1, 45 п.) , проходящей через середины всех трех диагоналей четырехсторонника. И это лишь малая часть того, что известно про данную конструкцию.

Соглашения:

- 1) Через (XYZ) мы будем обозначать окружность, описанную около треугольника XYZ (аналогично и для n -угольников).
- 2) Если на плоскости дан выпуклый четырехугольник $KLMN$, то четырехсторонником $KLMN$ мы будем называть четырехсторонник, образованный данным четырехугольником.
- 3) Для любых точек X и Y примем за M_{XY} середину XY .

Обозначения. В окружность ω_1 с центром O и радиусом R вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые BC и AD в точке Q . Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке S . Обозначим через $O_{AB}, H_{AB}, O_{BC}, H_{BC}, O_{CD}, H_{CD}, O_{DA}, H_{DA}$ центры описанных окружностей (O) и ортоцентры (H) треугольников QAB, PBC, QCD и PDA , соответственно, а через $H_{AC}, H_{CA}, H_{BD}, H_{DB}$ ортоцентры треугольников PAC, QCA, PBD, QDB , соответственно. Определим V как точку пересечения прямых OS и PQ . Будем считать, что M — это центр масс $ABCD$, а K — точка симметричная O относительно M . Окружность, проходящую через точки O_{AB}, O_{BC} и O_{CD} , назовем ω_2 . Определим h и t как прямые Обера и Гаусса четырехсторонника $ABCD$, соответственно. Обозначим через T точку пересечения ω_2 и прямой PQ , не совпадающую с V , а через X точку пересечения прямых BD и PQ .

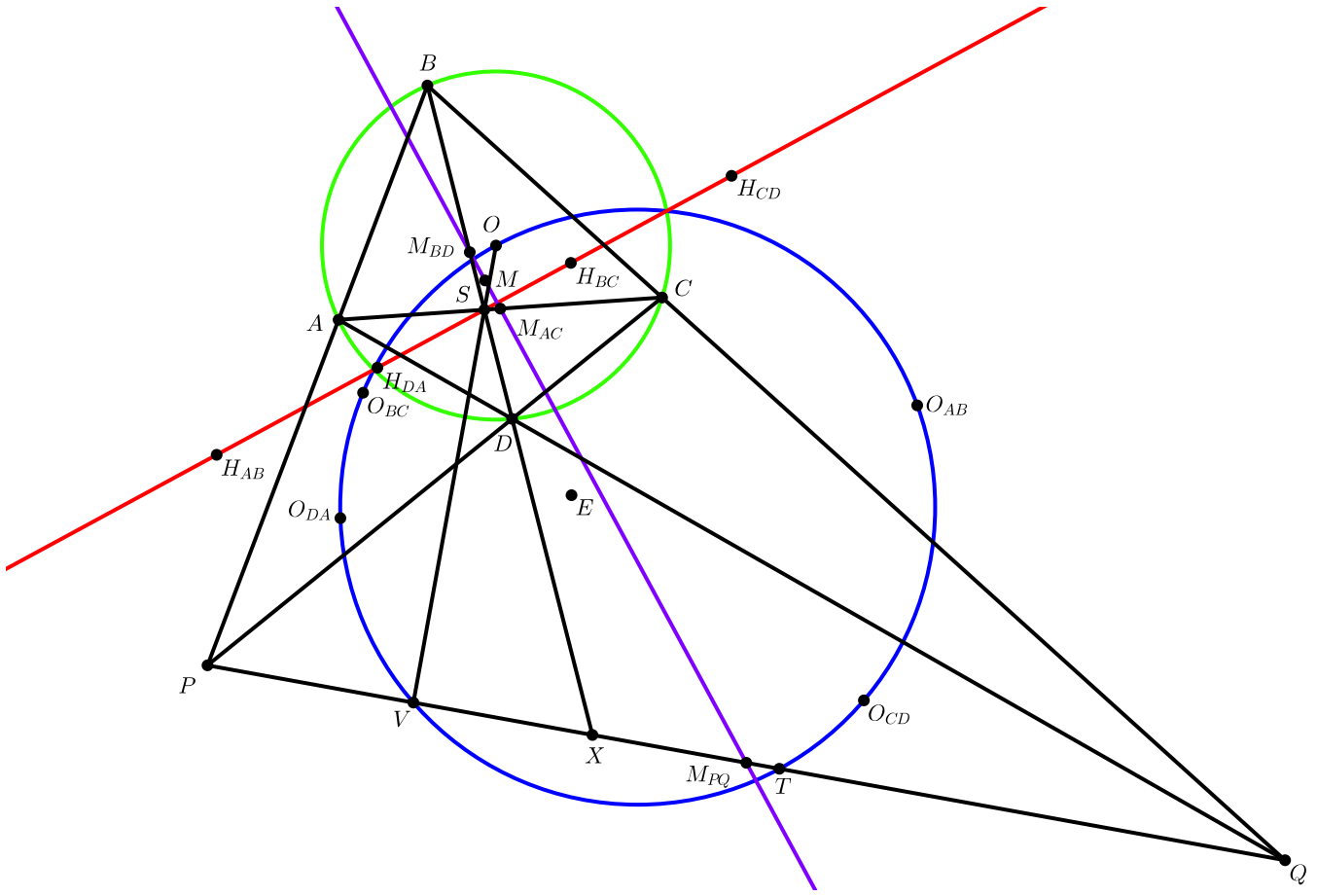


Рис. 1: Обозначения

II. Основные результаты.

Итак, один из известных фактов о полном четырехстороннике состоит в том, что четыре центра окружностей, описанных около главных треугольников, и точка Микеля лежат на одной окружности. (см. [2], задача 2.856) Мы обозначаем эту окружность через ω_2 . Оказывается, что в циклическом четырехстороннике на ней лежит еще и центр описанной окружности, а прямая h является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2 .

Теорема 1. В циклическом четырехстороннике точки $O, O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{DA}$ и V лежат на одной окружности ω_2 , притом прямая h является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2 . Доказательство теоремы 1 приведем в параграфе IV.

Теперь исследуем другие свойства окружности ω_2 . Следующая теорема устанавливает условия, при которых данная окружность касается прямой PQ .

Теорема 2. Отрезки MS и MO равны тогда и только тогда, когда окружность ω_2 касается прямой PQ .

Еще одним фактом о полном четырехстороннике является следующий:

Факт 1. Серединные перпендикуляры к отрезкам $O_{AB}H_{AB}, O_{BC}H_{BC}, O_{CD}H_{CD}, O_{DA}H_{DA}$ пересекаются в одной точке, называемой *точкой Эрвея*.

О самой точке Эрвея известно очень мало. Более того, авторам неизвестно ни одного чисто геометрического доказательства факта 1. Мы докажем следующую теорему, устанавливающую некоторые свойства точки Эрвея циклического четырехсторонника.

Теорема 3. Четырехугольники $O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB}$ и $O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA}$ вписанные, а окружности, описанные около них, концентрические, и центром этих окружностей является точка Эрвея.

Доказательства теорем 2 и 3 приведены в параграфе IV. В доказательствах нам понадобятся некоторые известные геометрические факты, которые мы перечислим в следующем разделе. Некоторые из них, для удобства читателя, докажем и прокомментируем.

III. Некоторые известные факты.

Приведем доказательства ряда известных утверждений (лемма 1, утверждение 1, утверждение 2). Идеи некоторых доказательств нам в дальнейшем понадобятся.

Лемма 1. Рассмотрим треугольник ABC , H — его ортоцентр. K, L, M — произвольные точки на его сторонах BC, AC, AB соответственно. Тогда H является радикальным центром окружностей, с диаметрами AK, BL и CM .

▷ Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот из вершин A, B, C соответственно. Рассмотрим окружность с диаметром AB . AA_1 — радикальная ось окружностей с диаметрами AK и AB , BB_1 — радикальная ось окружностей с диаметрами BL и BA , следовательно H лежит на радикальной оси окружностей с диаметрами AK и BL . Аналогично доказывается, что H лежит на радикальной оси окружностей с диаметрами BL и CM . $\square$

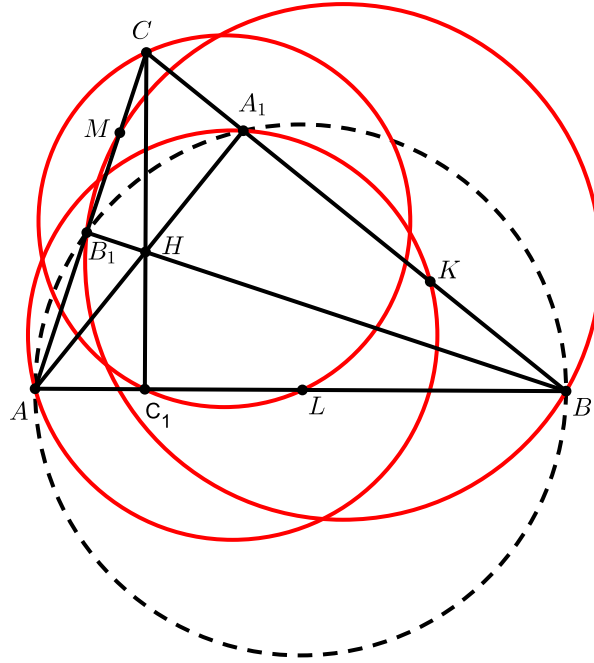


Рис. 2: Лемма 1

Утверждение 1. $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ лежат на одной прямой, которая называется прямой Обера четырёхсторонника $ABCD$. Точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ} лежат на одной прямой, называемой прямой Гаусса четырёхсторонника $ABCD$, перпендикулярной прямой Обера.

▷ Рассмотрим окружности, диаметрами которых являются отрезки AC, BD и PQ . Заметим, что по *лемме 1* точки $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ являются радикальными центрами окружностей с диаметрами AC, BD и PQ . Следовательно эти окружности соосны, тогда центры этих окружностей, которыми являются точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ} , лежат на одной прямой, а точки $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ лежат на радикальной оси, перпендикулярной линии центров этих окружностей. $\square$

Замечание. Напомним, что ω_1 — это окружность, описанная около четырехугольника $ABCD$, а S — точка пересечения диагоналей данного четырехугольника.

Следствие 2. Точка S лежит на прямой Обера.

▷ Степень точки S относительно окружности с диаметром AC равна $AS \times SC$. Степень точки S относительно окружности с диаметром BD равна $BS \times SD$. Но $AS \times SC = BS \times SD$, так как это степень точки S относительно окружности ω_1 . Следовательно точка S лежит на прямой Обера. $\square$

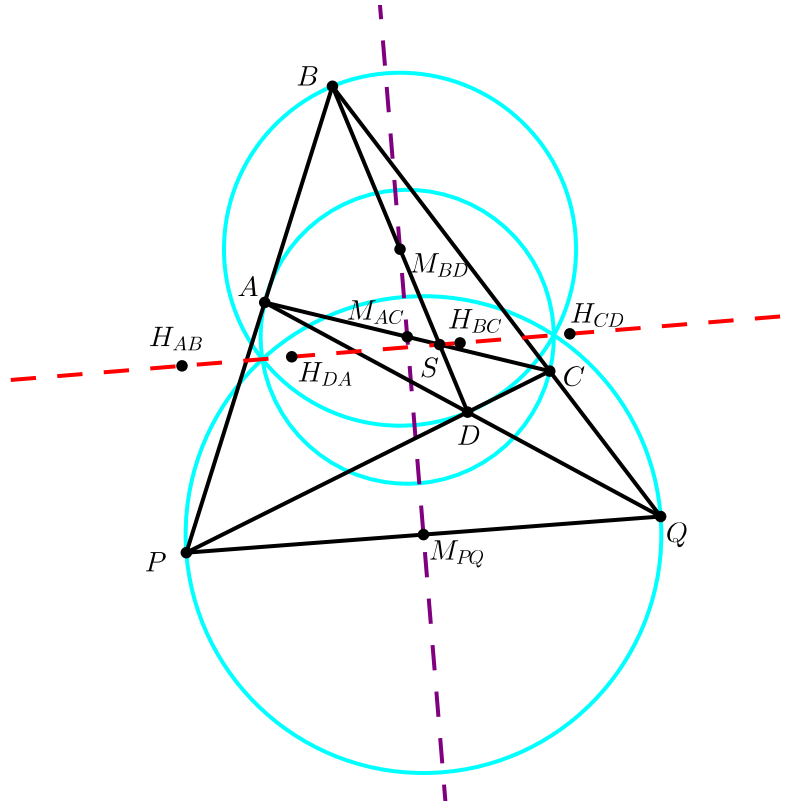


Рис. 3: Утверждение 1

Замечание. Напомним, что V — это точка Микеля четырехсторонника $ABCD$.

Утверждение 2. Точка пересечения PQ и OS четырехсторонника $ABCD$, совпадает с V .

▷ Пусть V' — точка пересечения OS и PQ . Заметим, что прямая PQ является полярной точки S относительно ω_1 . Отсюда следует, что $OS \times OV = R^2$. Тогда при инверсии относительно ω_1 прямые AC и BD перейдут в окружности (OAC) и (OBD) , соответственно, а точка S в точку пересечения этих окружностей, которой будет являться точка V' . Теперь пусть V — это точка Микеля четырехсторонника $ABCD$. Давайте докажем, что она является точкой пересечения окружностей (OAC) и (OBD) , из чего и последует утверждение. Для точки V' верно $\angle(AV', VC) = \angle(AV', VD) + \angle(VD, VC) = \angle(AP, PD) + \angle(QD, QC) = \angle(BP, BC) + \angle(BC, CP) + \angle(AQ, AB) + \angle(BP, BC) = 2\angle(BA, BC) = \angle(OA, OC)$, что равносильно тому, что точка V лежит на окружности (OAC) . Аналогично докажем, что точка V принадлежит окружности (OBD) . Так же нетрудно показать, что V принадлежит прямой PQ . Тогда точки V' и V совпадают. $\square$

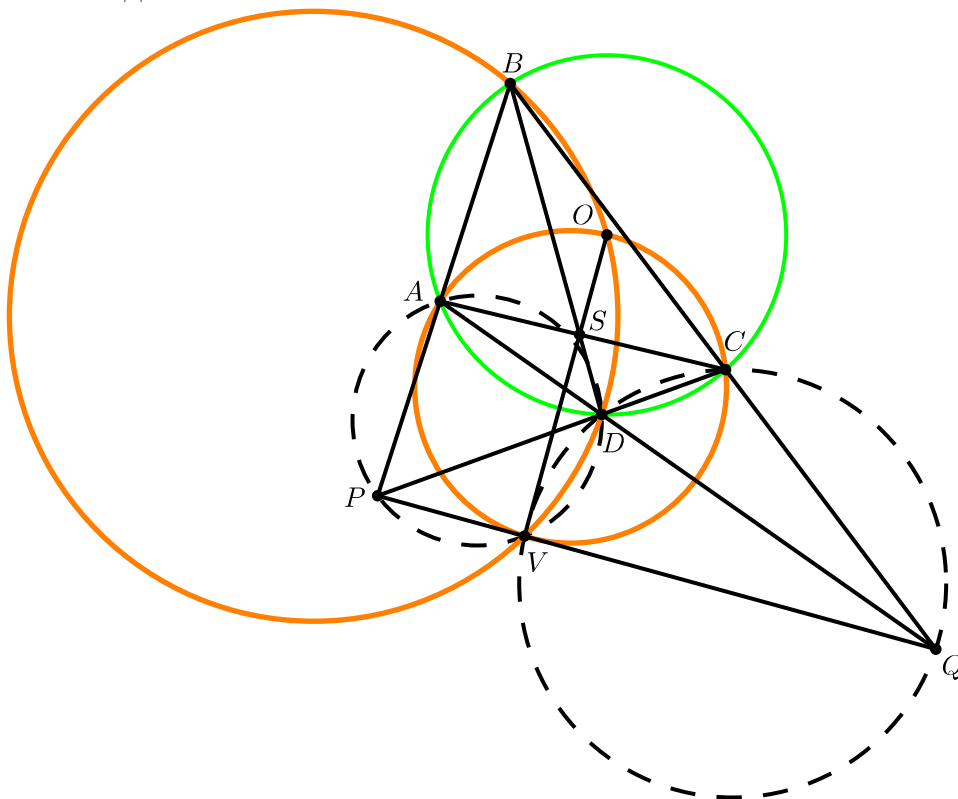


Рис. 4: Утверждение 2

Следствие 3. Четырехугольники $OBVD$ и $OAVC$ вписанные.

Комментарий. Связь с точкой двух велосипедистов. Заметим, что данное утверждение можно доказать иначе, установив связь с одним очень интересным геометрическим объектом.

Определение 2. Для двух окружностей, пересекающихся в точках A и B , назовем *точкой двух велосипедистов для A* такую точку K , что для любой прямой, проведенной через A и вторично пересекающей данных окружности в точках P_1 и P_2 , точка K равноудаленна от P_1 и P_2 . (см. [4], стр. 41)

Комментарий. Так же известно, что если O_1, O_2 - центры данных окружностей, то O_1AO_2K - параллелограмм.

Утверждение 3. Точка двух велосипедистов для Q окружностей (QCD) и (QAB) совпадает с точкой двух велосипедистов для P окружностей (PBC) и (PAD) .

▷ Действительно точка O равноудалена от всех вершин $ABCD$, а значит совпадает с обеими точками велосипедистов. $\square$

Альтернативное доказательство. Заметим, что $O_{AD}VOO_{BC}$ — параллелограмм ввиду утверждения 3. Тогда прямая OV перпендикулярна прямой PQ . Кроме того, прямая OS перпендикулярна прямой PQ , так как PQ — поляра точки S . Тогда O, V, S коллинеарны. $\square$

IV. Доказательство теорем 1-3 и ряда новых результатов.

Дальнейшие факты, насколько известно авторам, являются новыми. Здесь мы открываем первый блок, в котором речь пойдет о взаимосвязи прямой Обера и окружностей ω_1 и ω_2 .

Замечание. Как было сказано ранее точки O_{AB} , O_{BC} , O_{CD} , O_{DA} являются центрами описанных окружностей треугольников QAB , PBC , QCD и PDA , соответственно. А через ω_2 мы обозначили окружность, описанную около треугольника $O_{AB}O_{BC}O_{CD}$.

Утверждение 4. Точки $O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{DA}, O$ и V принадлежат одной окружности ω_2 .

▷ Докажем, что точки O_{BC}, O_{CD}, O_{DA} и V лежат на одной окружности. Для этого нам нужно доказать, что $\angle(O_{DA}O_{BC}, VO_{DA}) = \angle(O_{CD}O_{BC}, VO_{CD})$. Данное равенство получим следующим образом: $\angle(O_{DA}O_{BC}, VO_{DA}) = \angle(O_{BC}O_{DA}, PV) + \angle(PV, O_{AD}V) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \angle(PD, DV)) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \angle(QC, QV)) = \angle(O_{BC}O_{CD}, VC) + \angle(VC, O_{CD}V) = \angle(O_{CD}O_{BC}, VO_{CD})$. Аналогично, докажем, что точки O_{BC}, O_{CD}, O_{AB} и V лежат на одной окружности.

То есть уже пять из шести точек, данных в условии, лежат на одной окружности, которой является ω_2 . Теперь, показав, что четырехугольник $OO_{BC}O_{DA}O_{CD}$ вписанный, мы докажем, что точка O лежит на окружности ω_2 . Для выяснения данного вопроса нам достаточно доказать, что $\angle(OO_{BC}, OO_{DA}) = \angle(O_{BC}O_{CD}, O_{CD}O_{DA})$. Заметим, что $\angle(OO_{BC}, OO_{DA}) = \angle(OM_{BC}, OM_{DA}) = \angle(QB, QA)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что $\angle(O_{BC}O_{CD}, O_{CD}O_{DA}) = \angle(O_{CD}M_{CV}, O_{CD}M_{DV}) = \angle(VC, VD) = \angle(QB, QA)$. Из чего следует желаемое равенство углов. $\square$

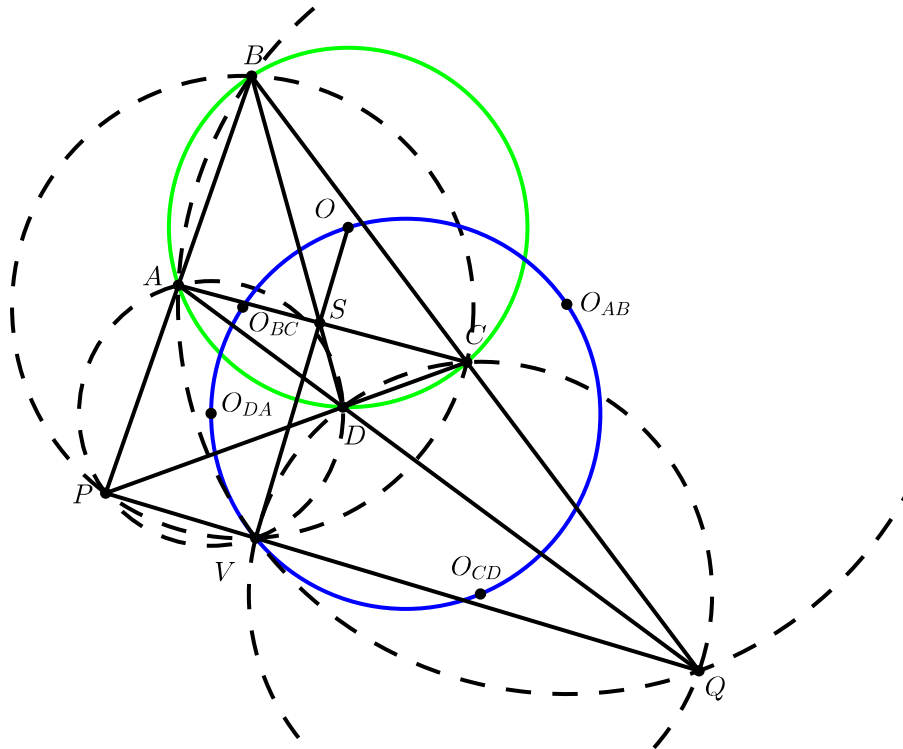


Рис. 5: Утверждение 4

Обнаружение столь замечательной окружности навело авторов на мысль об изучении ее свойств. К нашей радости, выяснилось, что она очень тесно связана с прямой h , что отражает формулировка *теоремы 1*.

Замечание. Напомним, что h и t - это прямые Обера и Гаусса четырехсторонника $ABCD$, соответственно.

Доказательство теоремы 1.

▷ Так как четырехугольник $ODVB$ вписанный по *следствию 3*, то $BS \times DS = OS \times SV$. Из этого следует, что точка S лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2 . По *следствию 2* точка S лежит на прямой Обера. Значит, нам достаточно доказать, что прямая h перпендикулярна линии центров окружностей ω_1 и ω_2 . Последнее на основании *утверждения 1* равносильно тому, что прямая t параллельна линии центров. Так как $OV \perp PQ$, то OT - диаметр окружности ω_2 . Докажем, что $OT \parallel M_{AC}M_{BD}$. Для этого достаточно показать, что $\angle(OT, PQ) = \angle(M_{AC}M_{BD}, PQ)$. Заметим, что из вписанности четырехугольников $OM_{BD}SM_{AC}$ и $OM_{BD}VX$ следует, что $\angle(M_{AC}M_{BD}, PQ) = \angle(M_{AC}M_{BD}, AC) + \angle(AC, PQ) = \angle(SO, OM_{BD}) + \angle(AC, PQ) = \angle(M_{BD}X, XV) + \angle(AC, PQ) = \angle(BD, PQ) + \angle(AC, PQ)$. А эта сумма, в свою очередь, равна следующему: $\angle(BD, BP) + \angle(PB, PQ) + \angle(AC, CP) + \angle(PC, PQ) = \angle(PB, PQ) + \angle(PC, PQ) = \angle(PB, PC) + 2\angle(PC, PQ) = \angle(OO_{DA}, O_{DA}D) + \angle(O_{DA}D, O_{DA}V) = \angle(OO_{DA}, O_{DA}V) = \angle(OT, TV) = \angle(OT, PQ)$. Таким образом, мы доказали требуемое равенство направленных углов. $\square$

Следствие 4. h является образом ω_2 при инверсии относительно ω_1 .

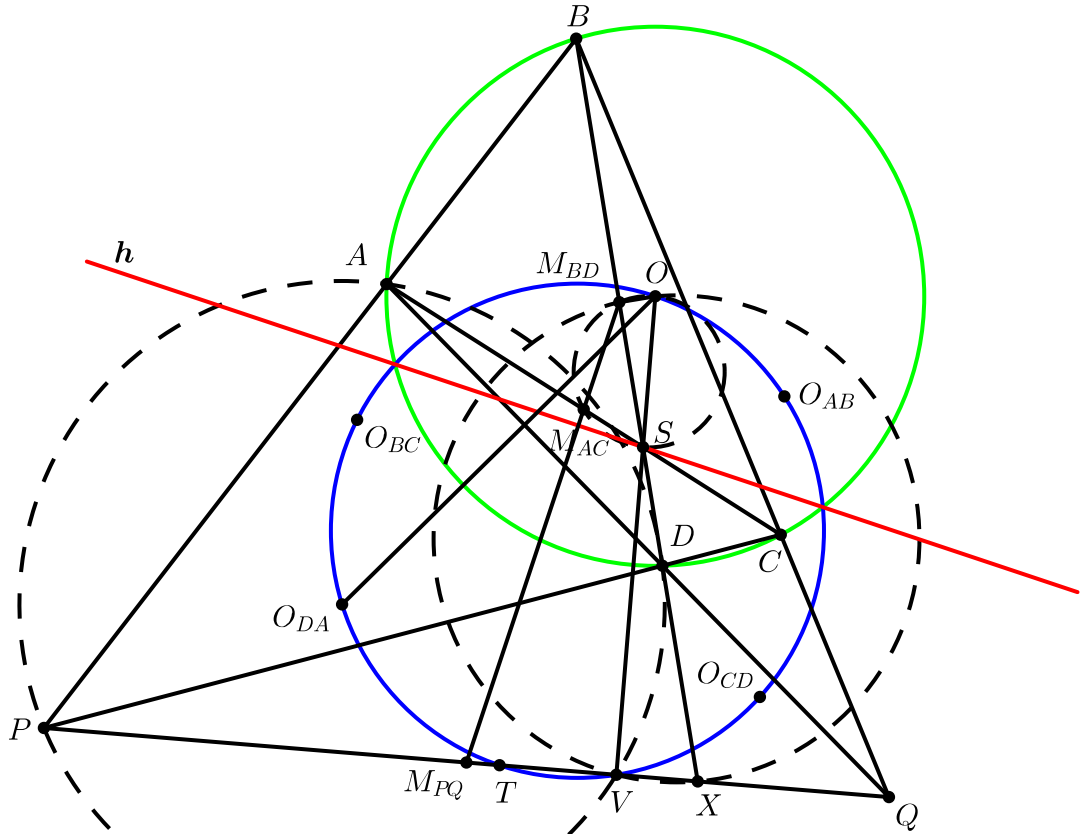


Рис. 6: Теорема 1

Кроме того, оказывается, что у окружности ω_2 есть свойство, неожиданно связывающее ее с центром масс M четырехугольника $ABCD$, что сформулировано в *теореме 2*.

Доказательство теоремы 2.

Замечание. Точка K по определению является образом симметрии O относительно M .

▷ Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая вспомогательная

Лемма 2. Точка K лежит на прямой h .

▷ Из точек M_{AB} и M_{CD} опустим перпендикуляры h_1 и h_2 на прямые CD и AB , соответственно. Тогда прямые h_1 , h_2 , OM_{AB} и OM_{CD} образуют параллелограмм. При этом точкой пересечения его диагоналей будет середина отрезка $M_{AB}M_{CD}$, которой является точка M . А из этого следует, что точка K является точкой пересечения прямых h_1 и h_2 . Пусть K' — середина $H_{DA}H_{BC}$. Тогда по теореме Фалеса прямая $K'M_{AB}$ перпендикулярна AB . Аналогично прямая $K'M_{CD}$ перпендикулярна CD . Отсюда следует, что K и K' совпадают. $\square$

Замечание. Напомним, что через H_{AC} , H_{CA} , H_{BD} , H_{DB} мы обозначили ортоцентры треугольников PAC , QCA , PBD , QCD , соответственно.

Следствие 5. Отрезки $H_{AB}H_{DA}$ и $H_{BC}H_{CD}$ равны.

Замечание. Примечательно, что помимо этого K является центром параллелограмма, $H'_{AC}H'_{CA}H'_{BD}H'_{DB}$, что можно нетрудно доказать, воспользовавшись *леммой 2*, поэтому читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно.

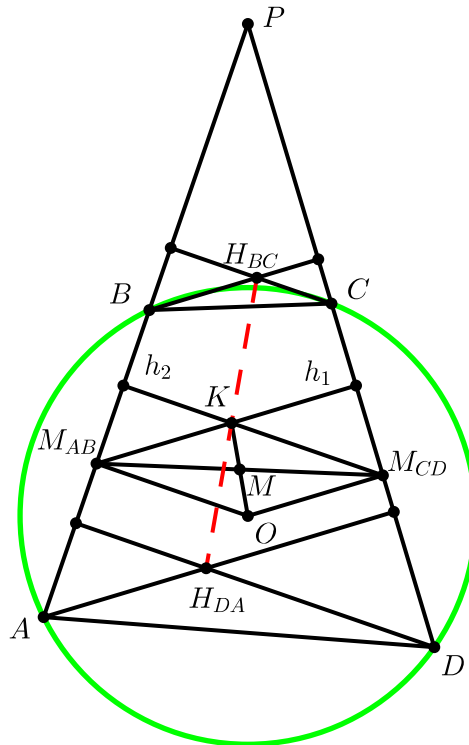


Рис. 7: Лемма 2

Докажем, что если $MO = MS$, то окружность ω_2 касается прямой PQ . На основании *леммы 2* можно сделать вывод, что $KS \perp SO$, что эквивалентно тому, что $h \perp OV$. Но, как мы знаем $h \perp OT$. Из чего следует, что точки V и T совпадают.

Если же окружность ω_2 касается прямой PQ , то $OV \perp h$, а значит $KS \perp SO$, что равносильно равенству MS и MO . $\square$

Замечание. Данная теорема может быть доказана и без обращения к *лемме 1*, но такой путь не выглядит столь изящно.

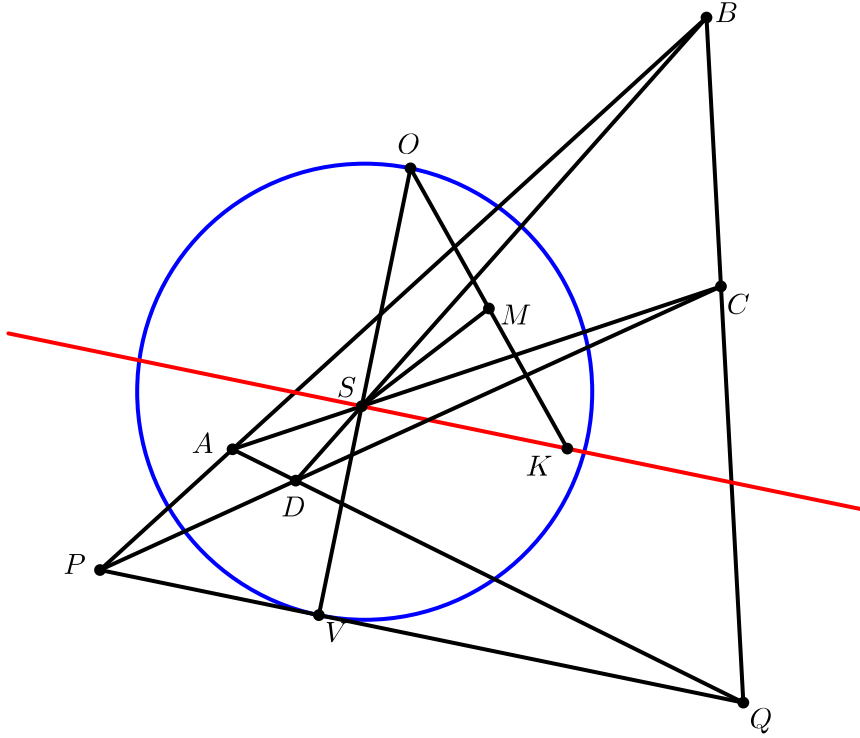


Рис. 8: Теорема 2

Следствие 6. Точка P лежит на прямой $H_{CA}H_{DB}$ (аналогичное верно и для точки Q).

▷ Действительно, для этого достаточно заметить, что треугольники $AH_{AB}B$ и $CH_{CD}D$ перспективны на основании *следствия 2*. Тогда для них верна теорема Дезарга, из которой и следует коллинерность точек P, H_{CA} , и H_{DB} . $\square$

Давно известна тесно связанная с нашим сюжетом теорема, утверждающая, что в любом четырёхстороннике $ABCD$ серединные перпендикуляры к отрезкам $O_{AB}H_{AB}, O_{BC}H_{BC}, O_{CD}H_{CD}, O_{DA}H_{DA}$ пересекаются в одной точке. Данный объект называется точкой Эрвея четырёхугольника $ABCD$. К сожалению, не известно красивого геометрического доказательства этого факта в общем случае (доказательство, основанное на алгебраических методах, может быть найдено в [1], задача № 262). Однако, авторы придумали абсолютно геометрическое доказательство для случая циклического четырёхсторонника, основывающееся на следующем утверждении.

Теорема 3. Четырёхугольники $O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB}$ и $O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA}$ вписанные, а окружности, описанные около них, концентрические, и центром этих окружностей является точка Эрвея.

▷ Докажем, что четыре точки O_{AB}, H_{CD}, O_{CD} и H_{AB} лежат на одной окружности. Для этого достаточно доказать, что $QO_{CD} \times QH_{AB} = QO_{AB} \times QH_{CD}$. Как известно $QH_{AB} = 2QO_{AB} \cdot |\cos(\angle BQA)|$; $QH_{CD} = 2QO_{CD} \cdot |\cos(\angle BQA)|$. Следовательно данное равенство верно. Аналогично доказывается, что точки $O_{DA}, H_{BC}, O_{BC}, H_{DA}$ лежат на одной окружности. Теперь заметим, что $O_{AB}O_{CD}O_{DA}O_{BC}$ — это равнобедренная трапеция. Действительно, прямые $O_{AB}O_{CD}$ и $O_{DA}O_{BC}$ параллельны, так как являются серединными перпендикулярами к отрезкам VQ и VP , соответственно, а четырехугольник $O_{AB}O_{CD}O_{DA}O_{BC}$ является вписанным. Значит серединные перпендикуляры к $O_{AB}O_{CD}$ и $O_{DA}O_{BC}$ совпадают. В свою очередь, из *леммы 2* и *следствия 5* следует, что серединные перпендикуляры к отрезкам $H_{AB}H_{CD}$ и $H_{BC}H_{DA}$ совпадают. Тогда рассмотрим точку пересечения серединных перпендикуляров к $H_{AB}H_{CD}$ и $O_{AB}O_{CD}$. Данная точка является центром окружностей $(O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB})$ и $(O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA})$. Тогда это и есть точка Эрвея четырёхугольника $ABCD$. $\square$

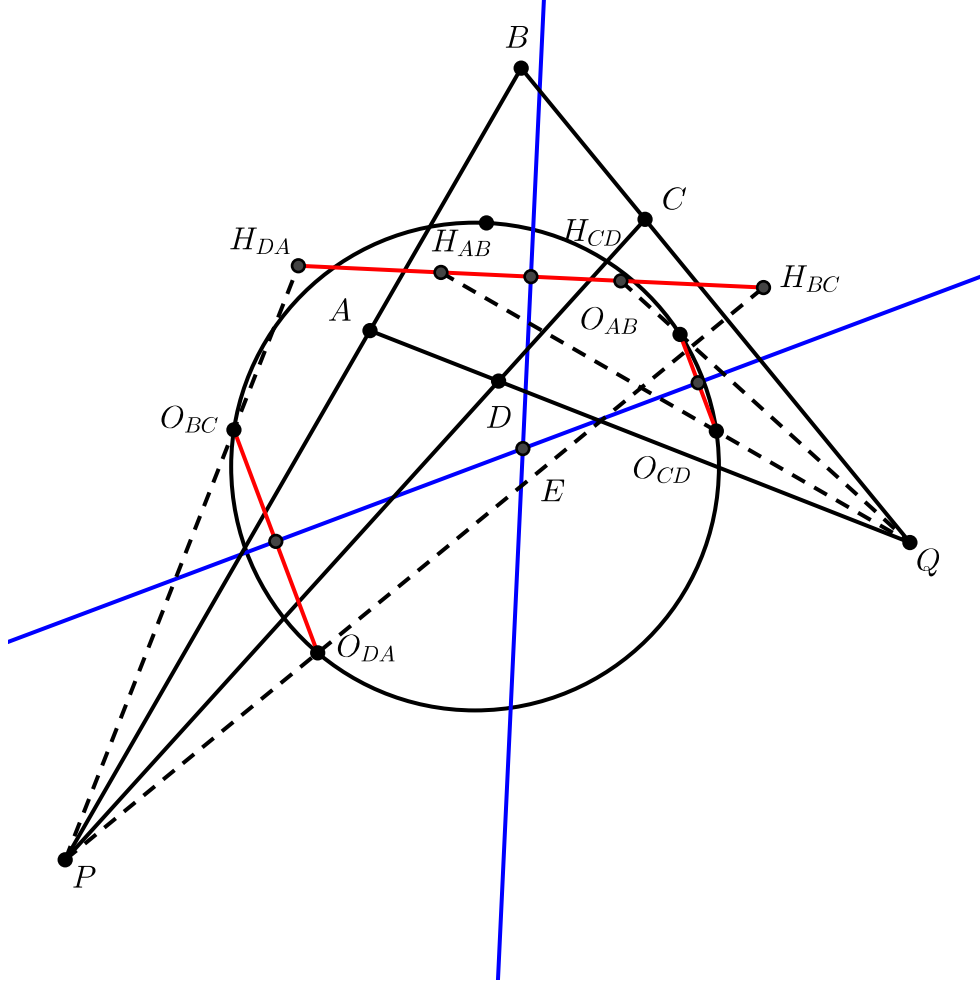


Рис. 9: Теорема 3.

V. Некоторые следствия.

Теорема 4. Прямая Эйлера треугольника PDA параллельна прямой BC тогда и только тогда, когда прямая Эйлера треугольника QCD параллельна прямой AB .

▷ Заметим, что условие $O_{DA}H_{DA} \parallel BC$ равносильно тому, что $O_{DA}H_{DA} \perp O_{DA}H_{BC}$, так как прямая $O_{DA}H_{BC} \perp BC$, а это равносильно тому, что центром окружности, описанной около треугольника $O_{DA}H_{BC}H_{DA}$, является середина отрезка $H_{BC}H_{DA}$, то есть на основании теоремы 3 точки K и E совпадают. Аналогично, то, что $O_{CD}H_{CD} \parallel AB$ равносильно тому, что точки K и E совпадают. Значит эти два утверждения равносильны. $\square$

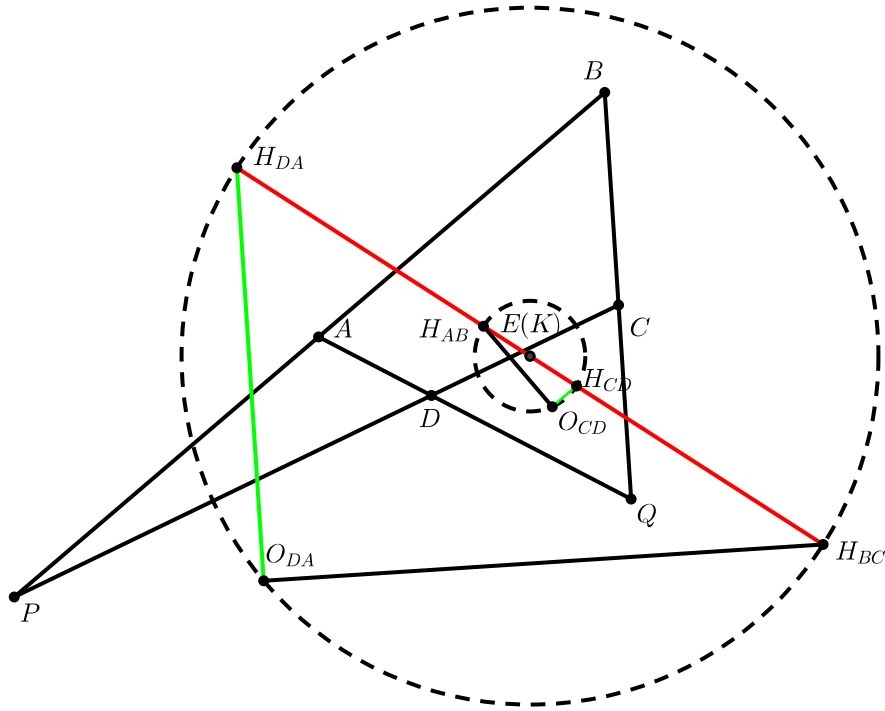


Рис. 10: Теорема 4.

Теперь мы вновь поговорим о точке двух велосипедистов (см. параграф III утв. 2) и ее связях с нашей конструкцией.

Следствие 7. Точки двух велосипедистов любой пары окружностей из $(QAB), (PBC), (QCD)$ и (PAD) и их точки пересечения отличной от V , лежат на w_2 (на рис. 11 они обозначены K_A, K_B, K_C, K_D).

▷ Заметим, что для любых двух окружностей, пересекающихся в точках A и B , и центрами O_1 и O_2 точка двух велосипедистов K для точки A лежит на окружности (O_1BO_2) ввиду того, что O_1AO_2K - параллелограмм.

Тогда, возвращаясь к поставленной задаче, возьмем любые две окружности. Тогда на основании вышесказанного получим, что соответствующая им точка двух велосипедистов лежит на окружности, проходящей через их центры и V , то есть на w_2 . $\square$

Следствие 8. Точки (на рис.11 они обозначены V_A, V_B, V_C, V_D) двух велосипедистов любой пары окружностей из $(QAB), (PBC), (QCD)$ и (PAD) , кроме пар (QAB) и (QCD) , (PBC) и (PAD) , и V , лежат на серединном перпендикуляре к PQ .

▷ Как мы помним, $O_{AB}O_{CD}O_{DA}O_{BC}$ — это равнобедренная трапеция. Тогда середины отрезков $O_{DA}O_{AB}, O_{DA}O_{CD}, O_{BC}O_{AB}, O_{BC}O_{CD}$ лежат на средней линии данной трапеции перпендикулярной PQ . Интересующие нас точки двух велосипедистов это образы этих середин при гомотетии с центром V и коэффициентом 2. Кроме того, заметим, что по определению точка двух велосипедистов для (PAD) и (QCD) равноудалена от P и Q , так как V лежит на PQ . Таким образом получаем, что вся эта прямая является серединным перпендикуляром к PQ . $\square$

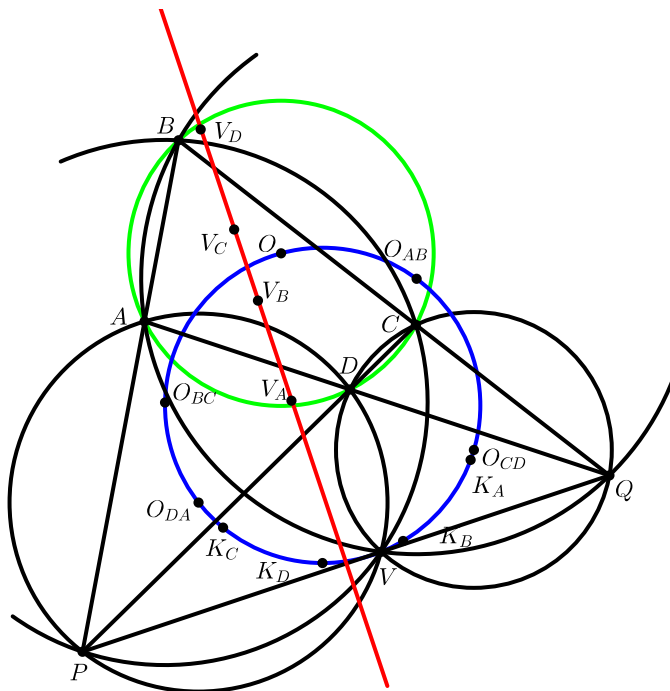


Рис. 11: Следствие 7.

Список литературы.

1. *Шарыгин И. Ф.* Библиотечка «Квант». Выпуск 017. Задачи по геометрии.
2. *Прасолов В. В.* "Задачи по планиметрии". — 4-е изд., дополненное — М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2001. — 584 с.
3. *Ефремов Д. Д.* "Новая геометрия треугольника". Одесса, 1902 — 334 с.
4. *Протасов В.Ю.* "О двух велосипедистах и вишневой косточке Квант №3, 2008г.