Свойства ортоцентра в теоремах и задачах

Реферат по курсу геометрии

выполнила ученица 9 А класса:

Цю Ноэль Гуанжун.

Руководитель и учитель:

Ховрина Вера Владимировна

Юго-западное окружное управление образования

Московский департамент образования

Государственное бюджетное образовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа

с углублённым изучением физики и математики №2007

Москва, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В реферате рассмотрены основные свойства ортоцентра, ортотреугольника и их применение при решении задач.

Также показано использование свойств ортоцентра при доказательстве некоторых теоретических фактов. Так, например, доказываются свойства прямой Штейнера, окружности Эйлера, формула Гамильтона, теорема Мавло и теорема Монжа.

Реферат разбит на главы. Первая посвящена основным свойствам ортоцентра. Задачи этой главы систематизированы по отдельным свойствам.
Во второй главе рассматриваются задачи на применение нескольких свойств ортоцентра. В третьей, четвёртой и пятой главах приводятся доказательства некоторых теоретических фактов.
Шестая глава состоит из авторских задач, при решении которых также используются свойства ортоцентра и ортотреугольника.

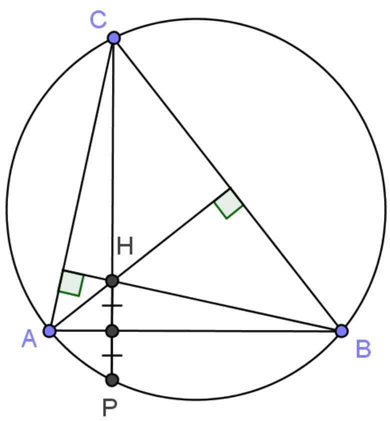
ГЛАВА 1
Основные свойства ортоцентра

Ортоцентр - это точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника.

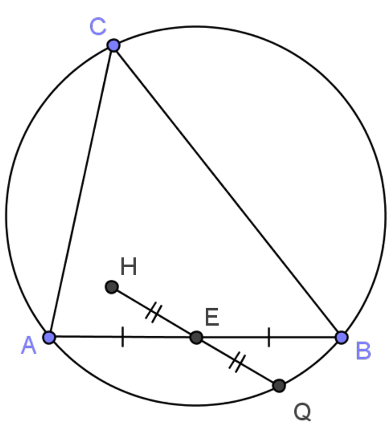
Ортотреугольник или ортоцентрический треугольник - это треугольник, вершины которого являются основаниями высот данного треугольника.

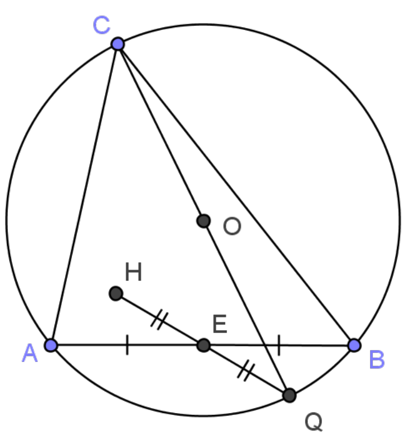
Обратим внимание на следующие свойства ортоцентра и ортотреугольника и покажем, как они применяются в решении задач разного уровня.

1 свойство. Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной около него окружности.

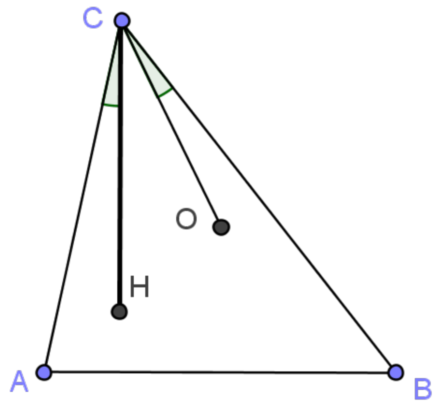


2 свойство. Точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны треугольника, лежит на описанной около него окружности и диаметрально противоположна вершине треугольника, противолежащей данной стороне.

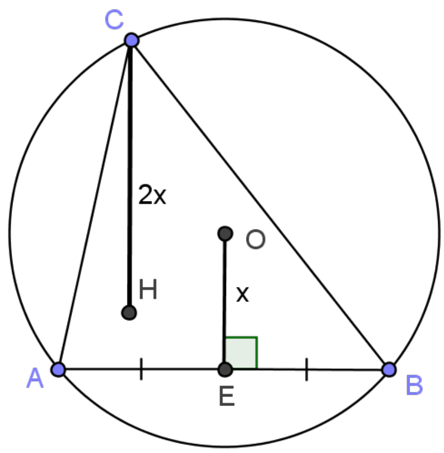




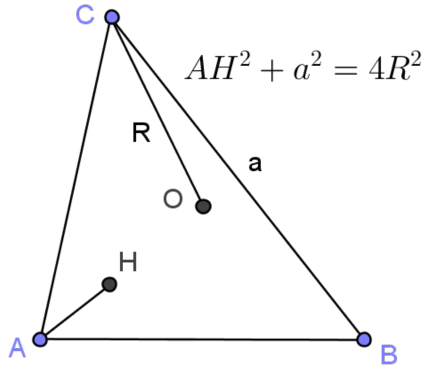
3 свойство. При изогональном сопряжении ортоцентр переходит в центр описанной окружности.



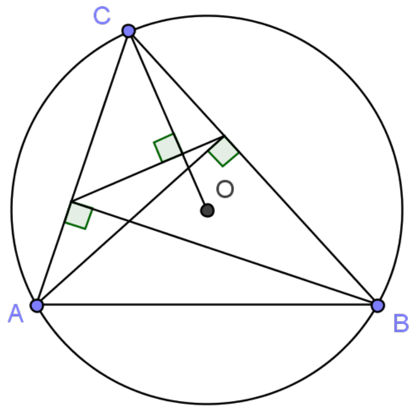
4 свойство. Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.



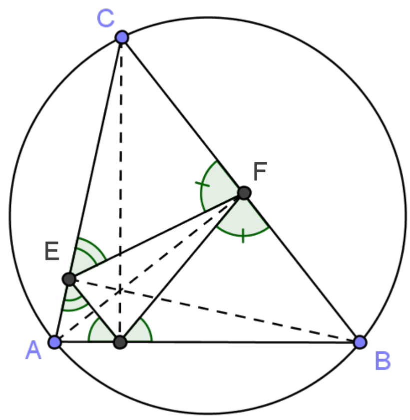
5 свойство. Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.



6 свойство. Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.



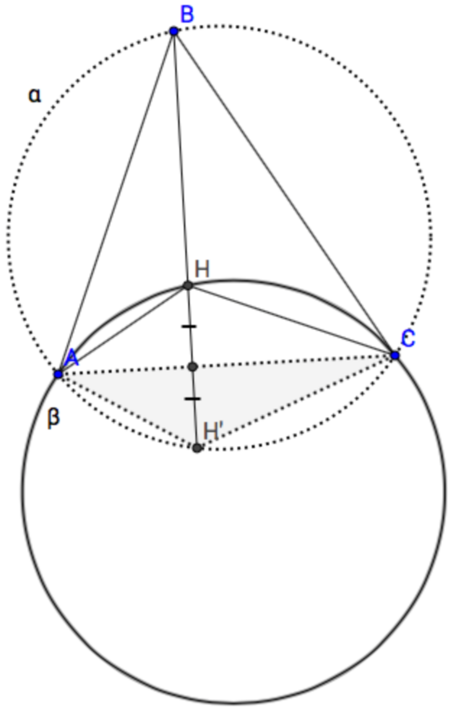
7 свойство. Ортоцентр в остроугольном треугольнике является инцентром ортотреугольника.



8 свойство. Если AD и BE — высоты треугольника ABC, то треугольник DEC подобен треугольнику ABC с коэффициентом |cos ∠B|.

Задачи на применение 1 свойства

Задача 1. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABC, ABH, BCH, CAH равны.

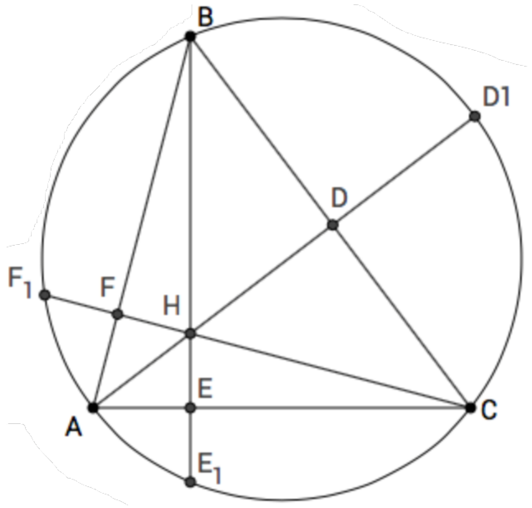


Доказательство.
Пусть луч BH пересечет окружность, описанную около ∆ABC, в точке H’, тогда по свойству ортоцентра точки H и H’ симметричны относительно стороны AC, поэтому ∆AHC и ∆AH’C симметричны, следовательно треугольники равны, а значит радиусы их описанных окружностей равны. Описанные окружности ∆ABC и ∆AH’C совпадают, следовательно их радиусы равны, тогда радиусы описанных окружностей ∆ABC и ∆AHC тоже равны. Аналогично докажем, что радиусы описанных окружностей ∆ABH, ∆ BCH, ∆CAH равны радиусу описанной окружности ∆ABC.

Задача 2. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Докажите, что HA · HD = HB · HE = HC · HF.

Доказательство.
Пусть лучи AH, BH и CH пересекают описанную окружность в точках D_1, E_1 и F_1 соответственно. По 1 свойству ортоцентра эти точки симметричны ортоцентру H относительно сторон треугольника, значит $HD = DD_1$, $HE = EE_1$ и $HF = FF_1$. По теореме о произведении отрезков хорд $HA \cdot HD_1 = HB \cdot HE_1 \iff HA \cdot 2HD = HB \cdot 2HE \iff$

HA · HD = HB · HE. Аналогично докажем, что HB · HE = HC · HF. Таким образом, HA · HD = HB · HE = HC · HF (1).

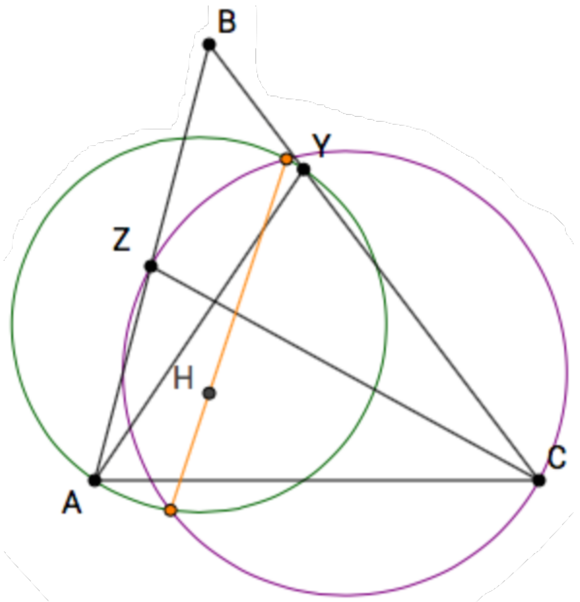


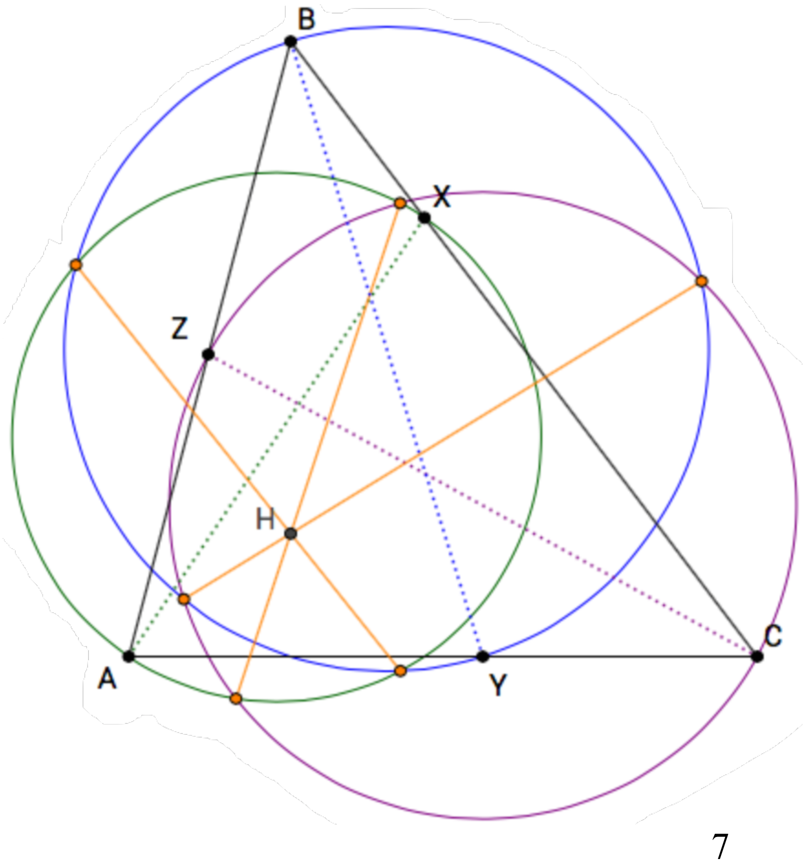
Следствия:

Если X, Y и Z - любые точки, взятые на сторонах BC, CA, AB соответственно, то окружности, построенные на чевианах AX, BY и CZ как на диаметрах, будут проходить через основания высот: точки D, E, F соответственно. Три равных выражения в соотношении (1) являются степенями точки H относительно этих трёх окружностей. Таким образом, мы доказали две интересные теоремы, которые появились в разное время, как трудные задачи:

если окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их радикальная ось проходит через ортоцентр этого треугольника;

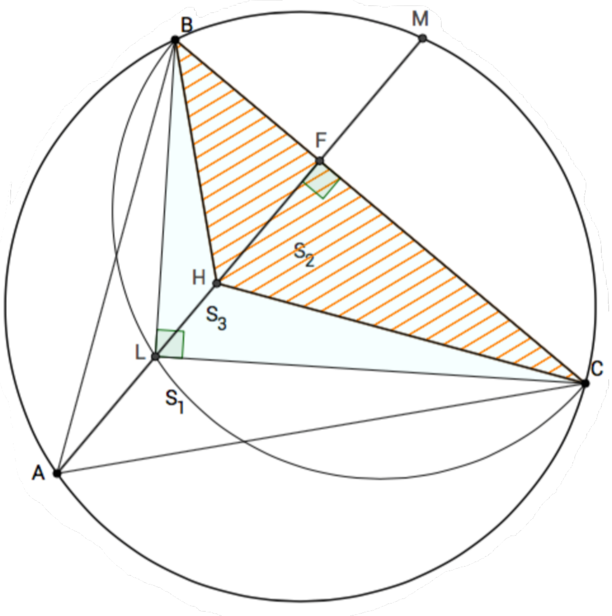
для любых трёх несоосных окружностей, имеющих чевианы в качестве диаметров, ортоцентр H - их радикальный центр.





Задача 3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность; L — точка её пересечения с высотой, опущенной на сторону BC, H — ортоцентр треугольника. Докажите, что площадь треугольника BLC есть среднее геометрическое площадей треугольников ABC и BHC.

Доказательство.
Продолжим луч AH до пересечения с описанной окружностью ΔABC в точке M, тогда по 1 свойству ортоцентра $HF = FM$. По теореме о произведении отрезков хорд $AF \cdot FM = BF \cdot FC$. LF - высота в прямоугольном треугольнике ΔBLC => $LF = (BF \cdot FC)^{1/2}$. Площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание, к которому она проведена, а так как ΔBLC, ΔABC и ΔBHC имеют общее основание, то достаточно доказать, что высота ΔBLC есть среднее геометрическое высот ΔABC и ΔBHC. Действительно, $LF = (BF \cdot FC)^{1/2} = (AF \cdot FM)^{1/2} = (AF \cdot HF)^{1/2}$ => $S_3 = (S_1 \cdot S_2)^{1/2}$.



Задача 4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

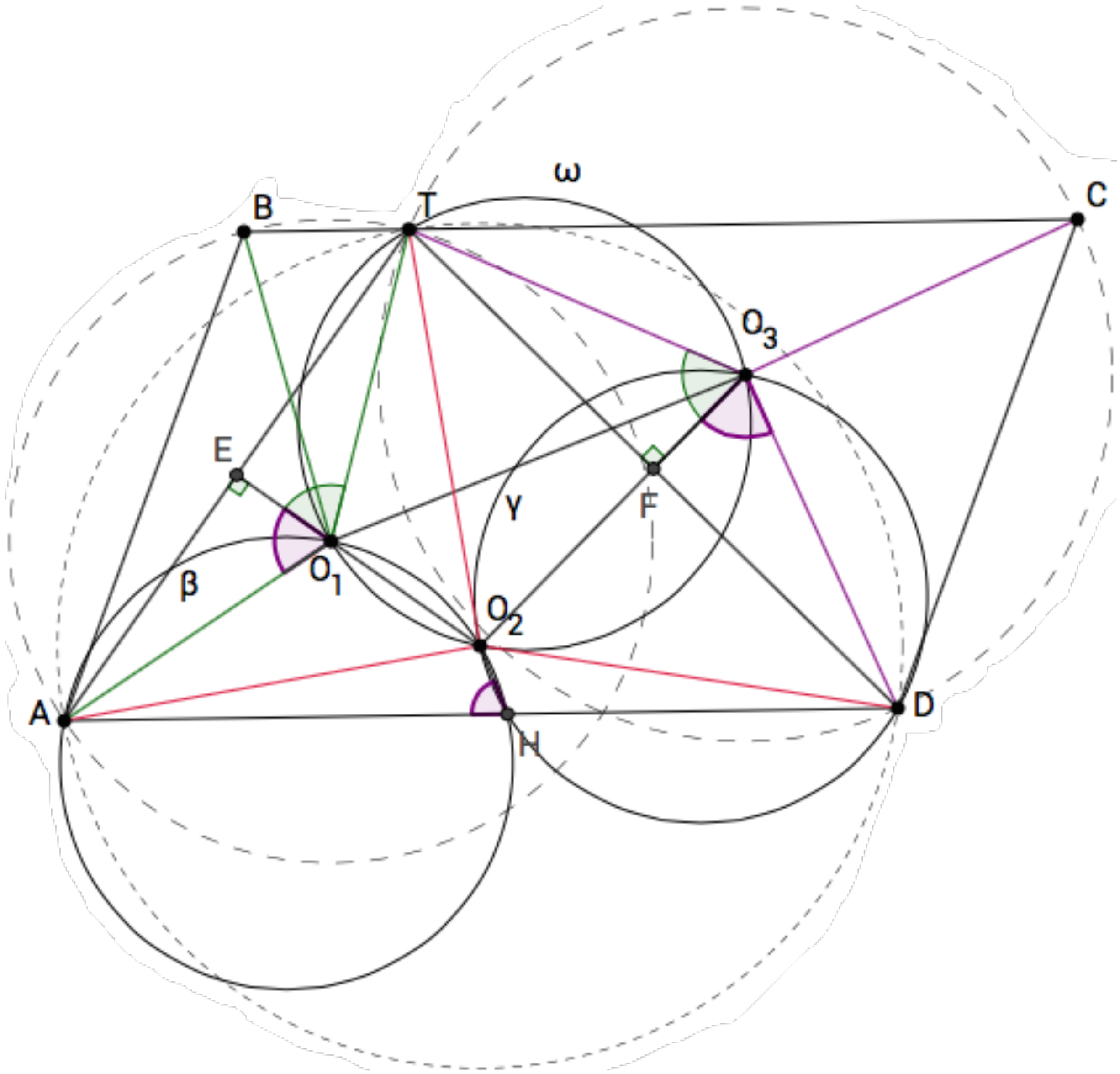
Доказательство.
1) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда, так как $\angle ABT$ и $\angle AO_1T$ (невыпуклый) - вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну дугу окружности, описанной около ΔABT, невыпуклый $\angle AO_1T = 2\alpha$, следовательно сопряжённый с ним $\angle AO_1T = 360° - 2\alpha$. Заметим, что прямая $O_1O_2 \perp AT$ (линия центров перпендикулярна отрезку, соединяющему точки

пересечения окружностей) => O_1E - высота в равнобедренном ΔAO_1T => по свойству O_1E - биссектриса $\angle AO_1T$, то есть $\underline{\angle EO_1T} = {}^1/_2\ \angle AO_1T = \underline{180° - \alpha}$.

2) $\angle ABC$ и $\angle TCD$ - внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ => $\angle TCD = 180 - \alpha$. Далее аналогично пункту 1 докажем, что $\underline{\angle TO_3F} = {}^1/_2\ \angle TO_3D = \angle TCD = \underline{180 - \alpha}$, следовательно $\underline{\angle TO_3F = \angle EO_1T}$ => $O_1TO_3O_2$ - вписанный четырёхугольник по признаку. Пусть описанная около него окружность - ω.

3) Опишем окружность γ около ΔO_2O_3D. Пусть она пересечет сторону AD в точке H, тогда, так как HO_2O_3D - вписанный четырёхугольник, $\angle TO_3F = \underline{180 - \alpha = \angle O_2O_3D = \angle AHO_2}$, а $\angle AO_1E = {}^1/_2\ \angle AO_1T = 180° - \alpha$ => $\angle AO_1E = \angle AHO_2$ => AO_1O_2H - вписанный четырёхугольник по признаку. Пусть описанная около него окружность - β.

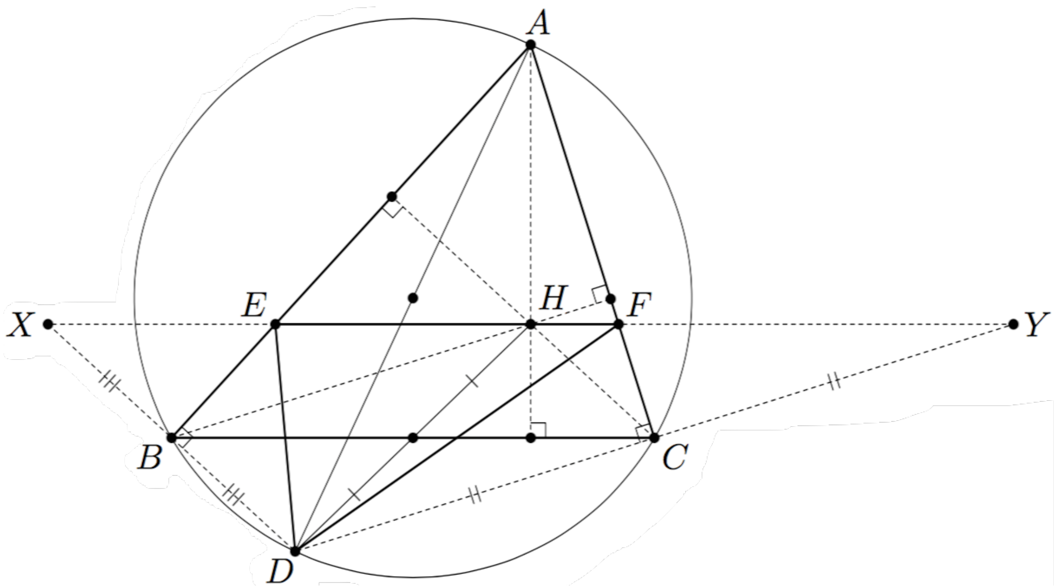
4) O_1E - серединный перпендикуляр к AT => точки A и T симметричны относительно прямой O_1O_2 => ΔO_1TO_2 и ΔO_1AO_2 - симметричны относительно прямой O_1O_2, а значит симметричны окружности ω и β. Аналогично докажем, что ω и γ симметричны относительно прямой O_2O_3.



5) Пусть H′ - ортоцентр $\Delta O_1O_2O_3$, тогда по 1 свойству ортоцентра точка симметричная H′ относительно прямой O_1O_2 лежит на окружности, описанной $\Delta O_1O_2O_3$, то есть на ω. Тогда, так как окружность β симметрична ω относительно прямой O_1O_2, точка H′принадлежит β. Аналогично докажем, что H′ принадлежит окружности γ. Следовательно H′ принадлежит и β, и γ, то есть H′ - точка пересечения окружностей β и γ, отличная от вершины треугольника O_2, значит H′ совпадает с H. Таким образом, точка H является ортоцентром $\Delta O_1O_2O_3$ и лежит на прямой AD. 2 способ. Точки A и D симметричны T относительно прямых O_1O_2 и O_2O_3, значит точка H лежит на прямой Штейнера AD точки T относительно $\Delta O_1O_2O_3$ (см. задачу 38).

Задачи на применение 2 свойства

Задача 5. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

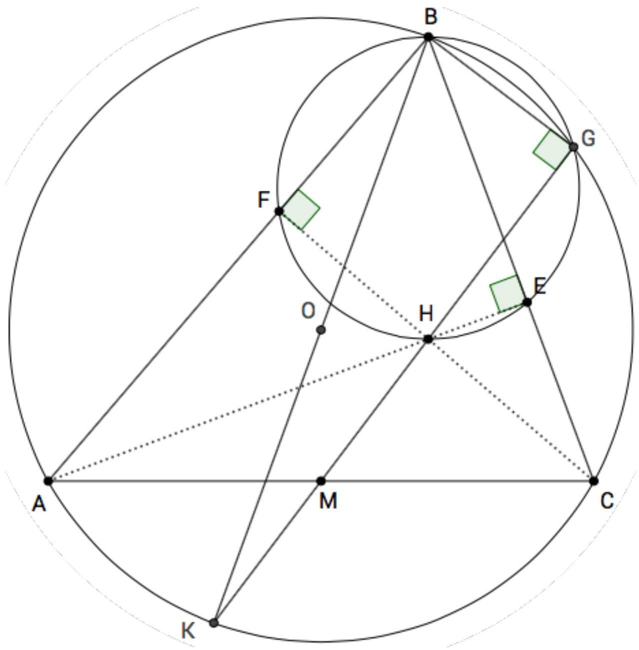


Доказательство.

Пусть X и Y — точки пересечения прямых BD и CD с прямой EF. По 2 свойству ортоцентра прямая BC делит отрезок DH пополам, следовательно, так как прямые BC и XY параллельны, по теореме Фалеса отрезки DX и DY делятся точками B и C пополам, значит BC - средняя линия в ΔXDY.

Заметим, что угол ABD - прямой, поэтому треугольник XED — равнобедренный, откуда XE = DE. Аналогично YF = DF, следовательно, XY = XE + EF + FY = DE + EF + DF = $P_{\Delta DEF}$ = 2BC.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CF. Докажите, что одна из точек пересечения прямой, проходящей через ортоцентр и середину стороны AC, с описанной окружностью треугольника ABC лежит на описанной окружности треугольника FHE.



Доказательство.

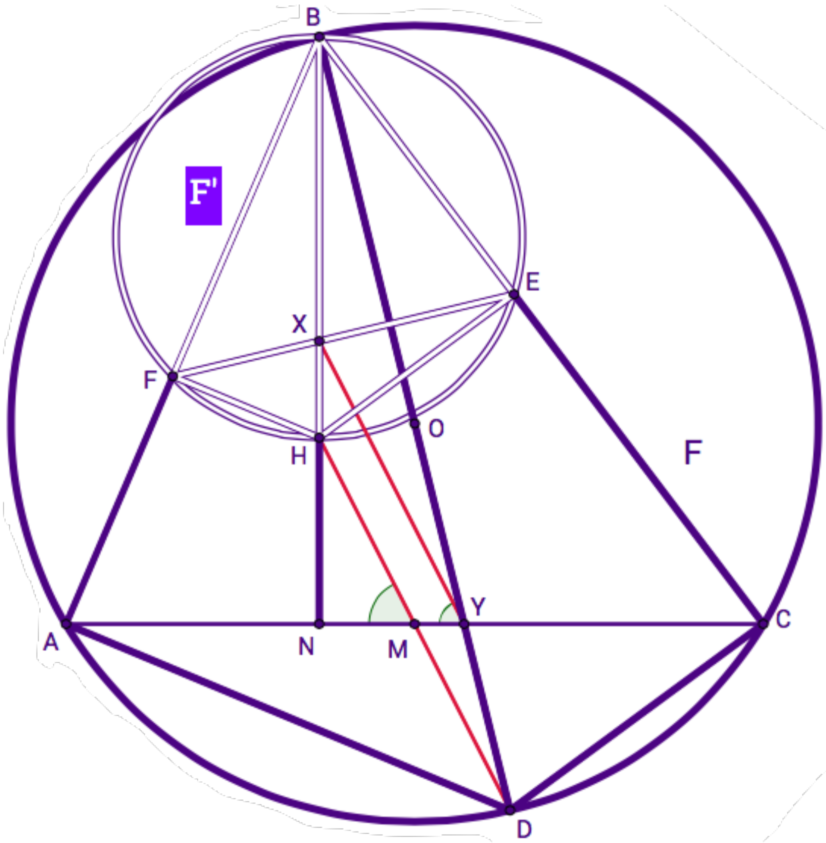
Пусть BK диаметр описанной окружности ΔABC. По 2 свойству ортоцентра прямая, проходящая через ортоцентр (H) и середину AC (точку M), пройдет через точку K. Пусть вторая точка пересечения прямой с окружностью - это точка G, тогда, так как ∠BGK опирается на диаметр, ∠BGK = 90° => ∠BGH = 90°.

Заметим, что HFBE - вписанный четырёхугольник, значит точка B лежит на описанной окружности ΔFHE. Углы ∠BEH и ∠BGH - прямые, опирающиеся на BH , следовательно BGEH - вписанный четырёхугольник по признаку => точки B, G, E, H, F лежат на одной окружности, значит G лежит на описанной окружности ΔFHE.

Задача 7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CF и BN. Они пересекаются в точке H. M - середина AC, O - центр описанной окружности. BH и FE пересекаются в точке X, луч BO пересекает AC в точке Y. Докажите, что XY || HM.

Доказательство.

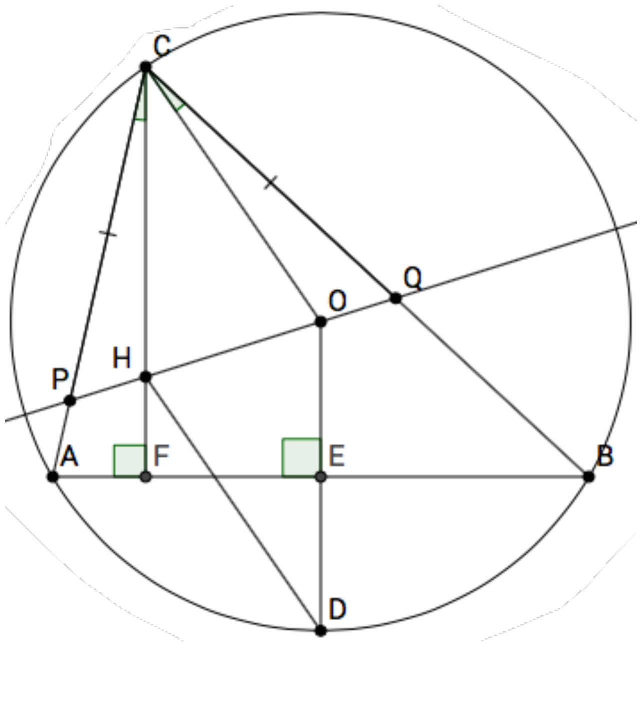
ΔFBE подобен ΔCBA, следовательно фигуры F и F’ подобны => диаметры BH и BD относятся так же, как отрезки BX и BY, соединяющие вершину соответственного треугольника с точкой пересечения диаметра описанной окружности со стороной. BH : BD = BX : BY, следовательно ΔHBD и ΔXBY по двум сторонам и углу между ними, значит ∠BYX = ∠BDH => XY || HM по признаку.



Задачи на применение 3 свойства

Задача 8. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника *ABC* (прямая Эйлера), пересекает стороны *AC* и *BC* в точках *P* и *Q*. Известно, что *CP* = *CQ*. Докажите, что $\angle ACB = 60^{\circ}$.

Доказательство.
CP = CQ по условию, следовательно ΔPCQ - равнобедренный => ∠CPH = ∠CQO, а по 3 свойству ортоцентра ∠PCH = ∠QCO, значит ΔPCH равен ΔQCO по двум сторонам и углу между ними => CH = CO. Проведём через точку O прямую, перпендикулярную AB, пусть она пересечёт дугу AB в точке D, тогда CO = OD как радиусы => CH = OD.



Заметим, что CH || OD, следовательно HCOP - параллелограмм. По 4 свойству CH = 2OE => OD = 2OE, следовательно точки O и D симметричны относительно AB => $\angle AOB = \angle ADB$, а $\angle ADB + \angle ACB = \underline{180^\circ} = \angle AOB + \angle ACB = \underline{3\angle ACB}$, так как $\angle ACB$ и $\angle AOB$ - вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну дугу => $\angle ACB = 60^\circ$.

Задача 9. Касательные в вершинах B и C треугольника ABC к описанной около него окружности ω пересекаются в точке T. AM_1 – медиана в треугольнике ABC. AO – радиус окружности ω. Докажите, что отрезки AT и AM_1 являются изогоналями.

Доказательство.

Пусть $\angle 1 = \angle OAM_1$ и $\angle 2 = \angle M_1TA$. Очевидно, точки T; M_1; O лежат на одной прямой. Соединив C и O, получим $\angle OCT = 90°$. Тогда CM_1 – высота, проведенная к гипотенузе в прямоугольном ΔOCT и $CO^2 = OT \cdot OM_1$. Но CO = AO = R. Следовательно, $AO^2 = OT \cdot OM$. Это означает, что OA - касательная к описанной около ΔAM_1T окружности.

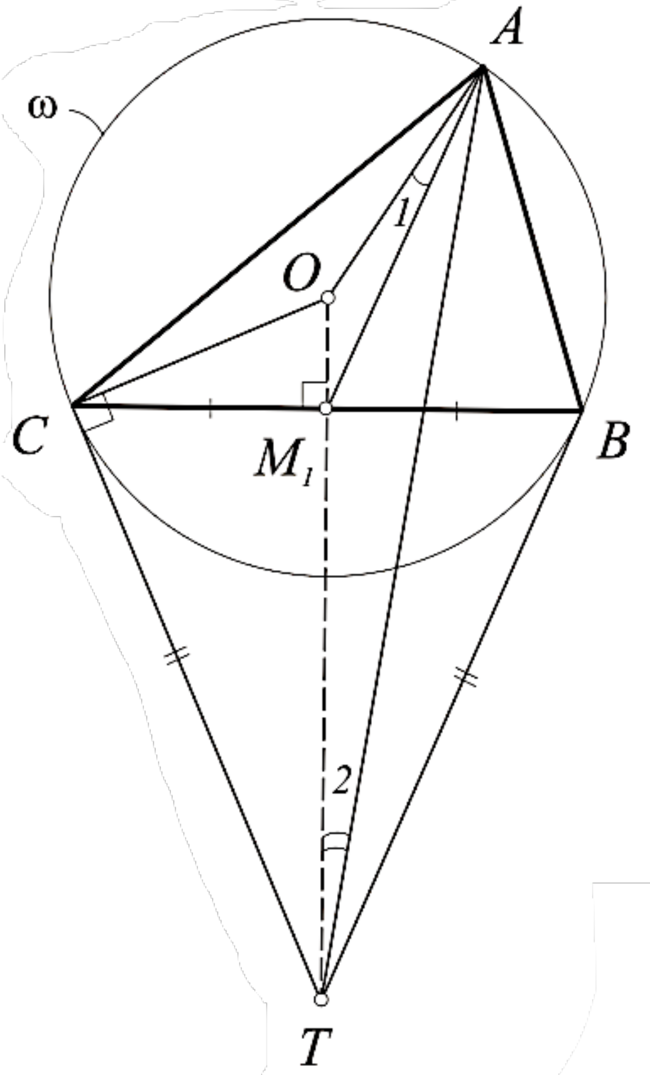


рис.1

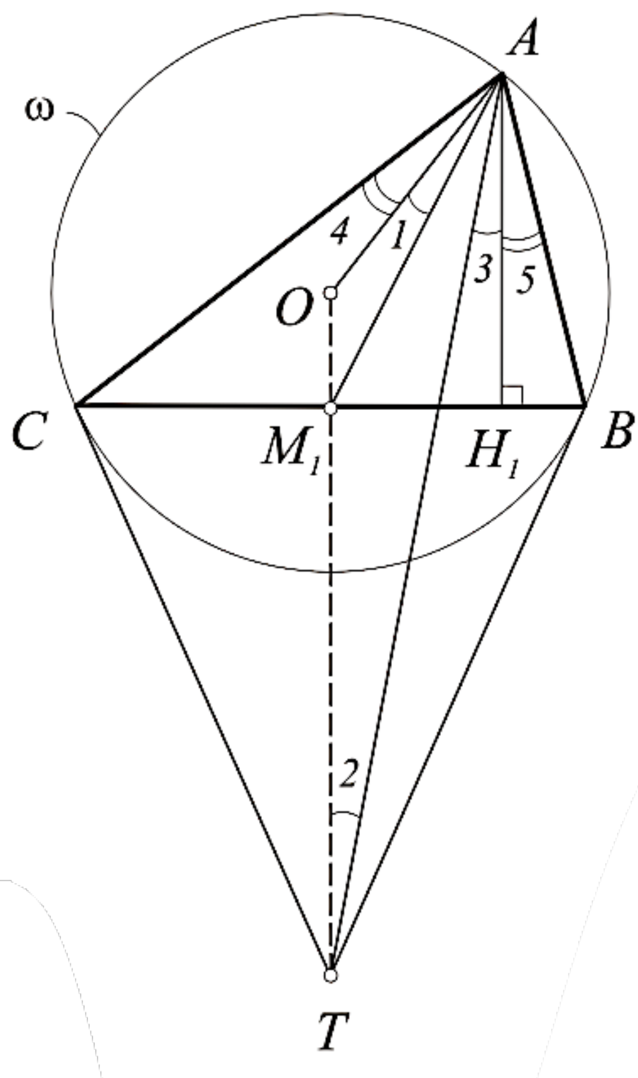


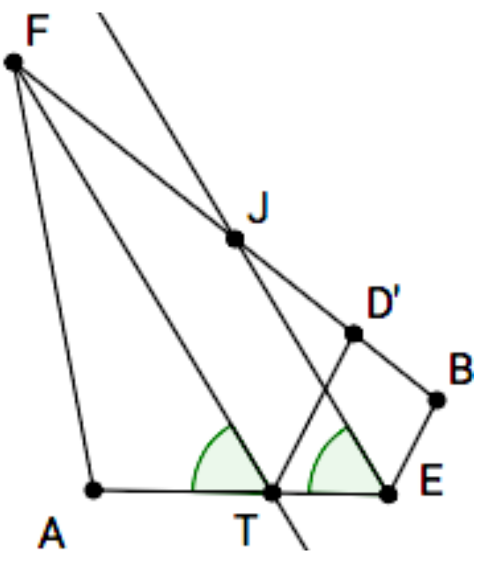
рис.2

Тогда $\angle 1 = \angle 2$ - как соответственно угол между касательной и хордой и вписанный угол. Проведём высоту AH_1 в ΔABC (рис.2), тогда по 3 свойству ортоцентра $\angle 4 = \angle 5$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 5$, или $\angle CAM_1 = \angle BAT$, что и требовалось доказать.

Задача 10. *Докажите, что отрезок, высекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из её центра под углом* $2|\angle A - \angle B|$.
Доказательство. См. лемму на стр. 42

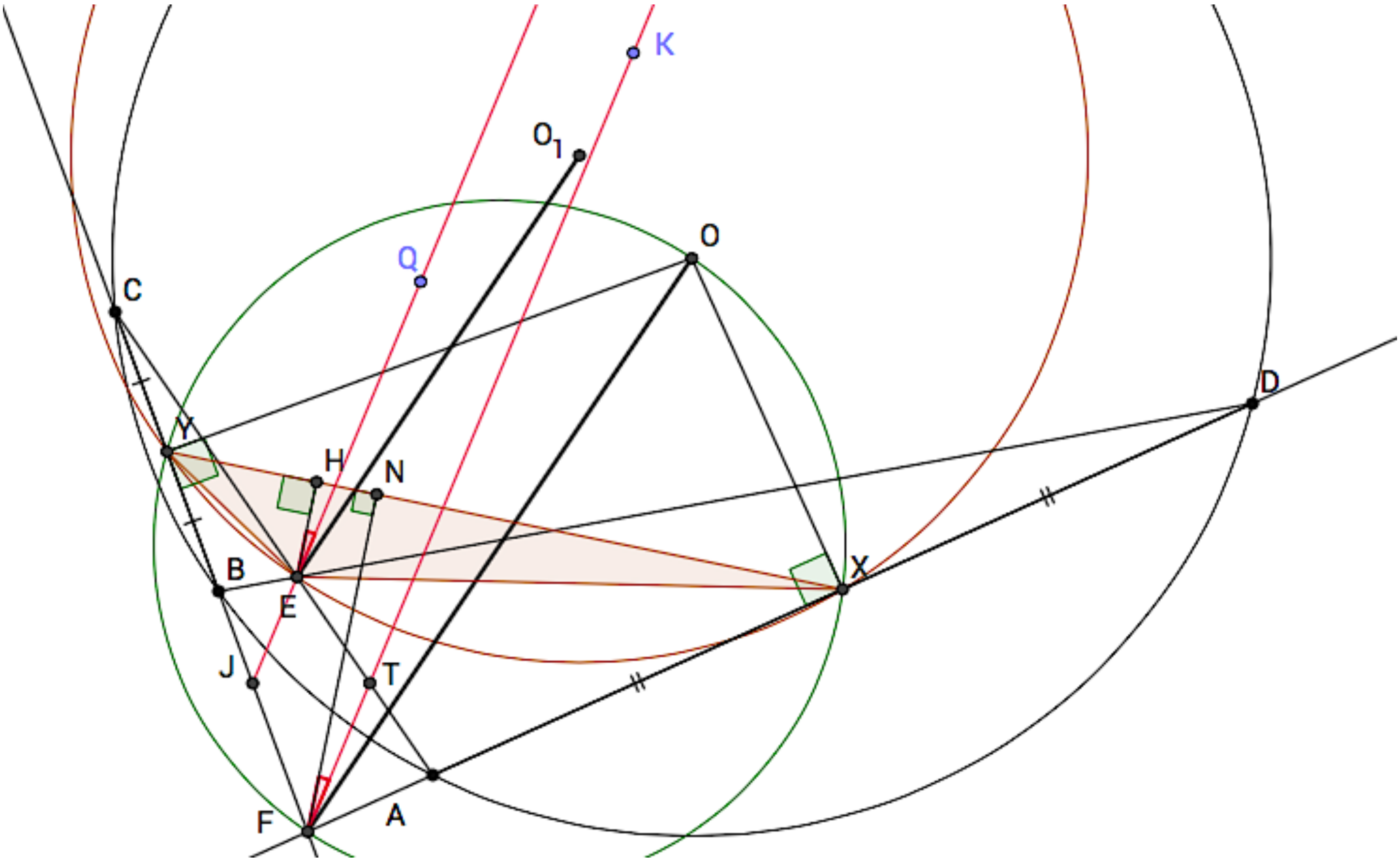
Задача 11. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

Доказательство:
Рассмотрим четырёхугольник FBEA. $\angle FAE = \angle FBE$, так как смежные сними равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Проведем биссектрису $\angle AFB$, пусть она пересечёт AE в точке T. Построим точку D′, симметричную A относительно FT. В силу симметрии $\angle AFT = \angle D'FT = \angle BFT$, следовательно D′ лежит на стороне FB, тогда $\angle FAT = \angle FD'T = \angle FBE$ => TD′ параллельно EB => $\angle ATD' = \angle TEB$. Проведем биссектрису EJ, тогда $\angle ATF = \angle TEJ$, значит биссектрисы параллельны, $FT \parallel JE$.



Проведём высоты EH и FN. EH и FN перпендикулярны YX, значит
$EH \parallel FN$. На проведённых биссектрисах за точки E и T возьмём произвольные точки Q и K. Таким образом, углы $\angle HEQ$ и $\angle NFK$ - углы с параллельными сторонами, значит они равны.

Отрезки OY и OX проведены из центра окружности к серединам хорд, значит перпендикулярны им, тогда в четырёхугольнике FYOX сумма двух противоположных 180°, следовательно FYOX вписанный по признак, причём FO - диаметр. По 3 свойству ортоцентра проведенные биссектрисы - дважды биссектрисы, то есть ∠NFK = ∠OFK, ∠HEQ = $∠O_1EQ$, а ∠HEQ = ∠NFK, следовательно$∠O_1EQ$ = ∠OFK, тогда, так как биссектрисы EQ || FK, OF параллелен O_1E.



Задачи на применение 4 свойства

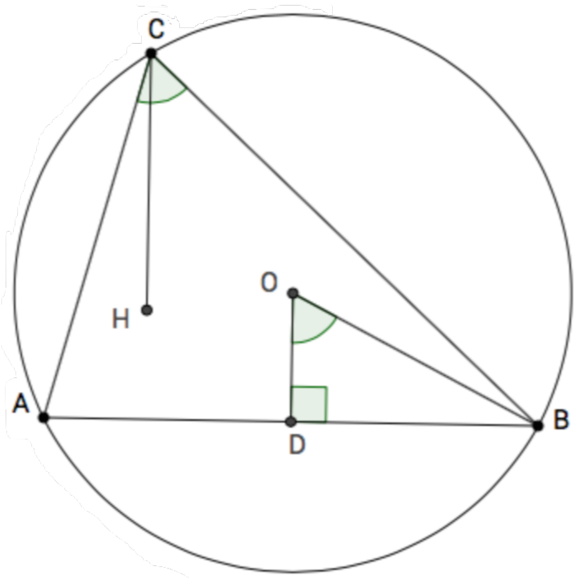
Задача 12. Докажите, что расстояние от вершины C треугольника ABC до ортоцентра равно 2R · |cos∠C|, где R - радиус описанной окружности.

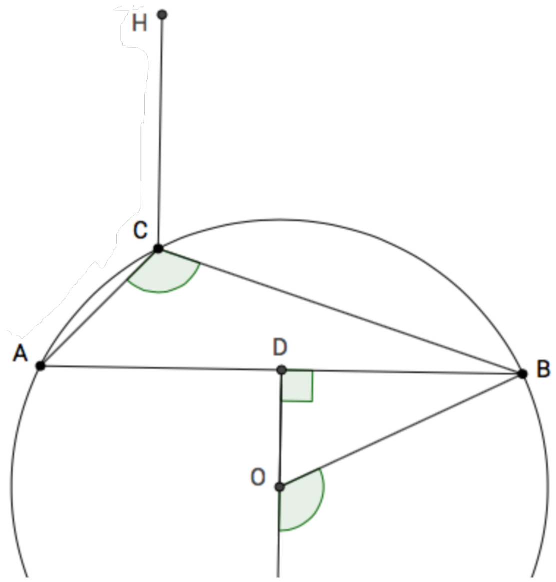
Доказательство:

Пусть H - ортоцентр, D - проекция точки O на сторону AB.

Если ∠C - острый. Углы ∠AOB и ∠ACB - центральный и вписанный, опирающиеся на одну дугу, значит $^1/_2$∠AOB = ∠ACB = ∠DOB => ∠C = ∠DOB. По 4 свойству ортоцентра CH = 2OD = 2R · cos∠DOB = 2R · cos∠C.

Если $\angle C$ - тупой. Углы $\angle AOB$ и $\angle ACB$ - центральный и вписанный, опирающиеся на одну дугу, значит $^1/_2\angle AOB$ (невыпуклый) = $\angle ACB = 180° - \angle DOB \Rightarrow \angle C = 180° - \angle DOB$. По 4 свойству ортоцентра $CH = 2OD = 2R \cdot \cos(\angle DOB) = - 2R \cdot \cos(180° - \angle DOB) = - 2R \cdot \cos\angle C$. Таким образом, $CH = 2R \cdot |\cos\angle C|$.

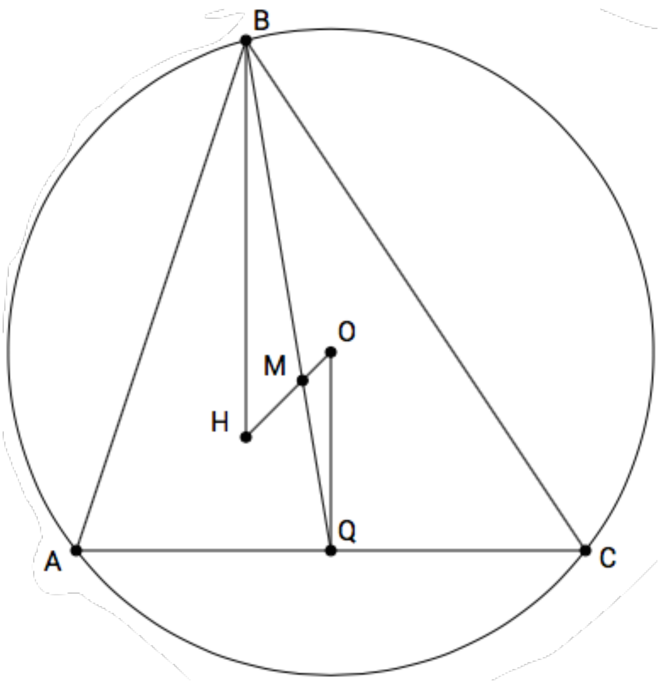




Задача 13. Ортоцентр H, центр описанной окружности O и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой - *прямой Эйлера*.

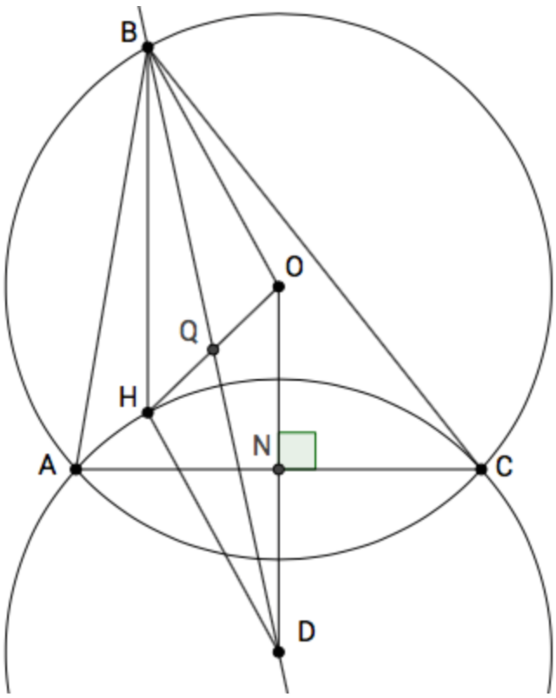
Доказательство.

Пусть прямая OH пересекает отрезок BQ в точке M. Заметим, что треугольники ΔOQM и ΔHBM подобны по двум углам.Тогда, так как по 4 свойству ортоцентра $BH = 2OQ$, $BM : MQ = BH : OQ = 2 : 1$. Таким образом, получаем, что точка M лежит на медиане BQ и делит её в отношении 2 :1 , считая от вершины, поэтому точка M является точкой пересечения медиан треугольника ΔABC.



Задача 14. В остроугольном треугольнике *ABC* точка *H* — ортоцентр. Докажите, что прямые Эйлера треугольников *HBC*, *HAC* и *HAB* пересекаются в центре окружности девяти точек треугольника *ABC*.

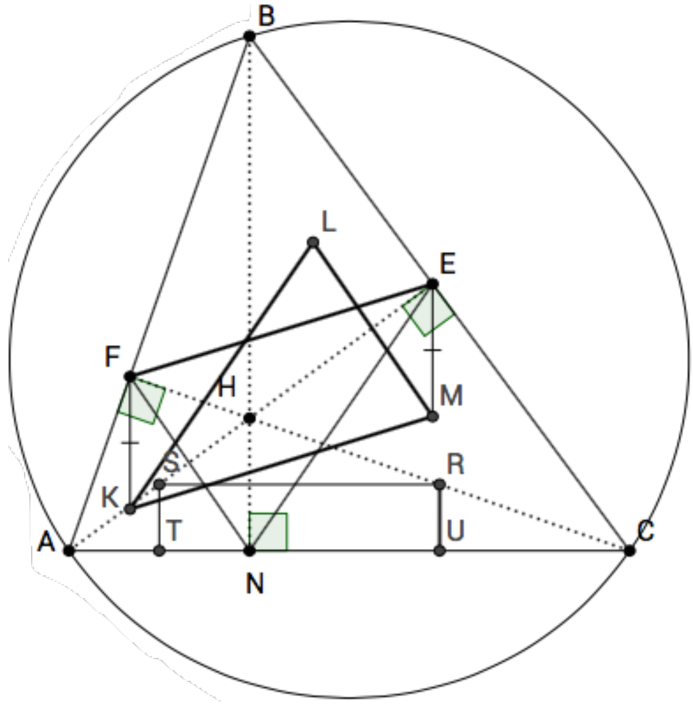
Доказательство:
Пусть O - центр окружности, описанной около ΔABC. Построим точку D, симметричную O относительно стороны AC. Описанные окружности ΔABC и ΔAHC симметричны относительно AC (см. задачу 1), поэтому D - центр описанной окружности ΔAHC.
По 4 свойству ортоцентра BH = 2ON = OD, а BH || OD, значит HBOD - параллелограмм по признаку, следовательно его диагонали делятся точкой пересечения (Q) пополам. Заметим, что точка B является ортоцентром для ΔHAC, значит прямая DB, прямая Эйлера ΔHAC, проходит через середину отрезка HO. Аналогично докажем, что прямые Эйлера ΔHBC и ΔHAB также проходят через середину HO. По следствию 2 из задачи 39 середина HO - центр окружности Эйлера ΔABC, то есть прямые Эйлера ΔHAC, ΔHBC и ΔHAB проходят через центр окружности Эйлера ΔABC.



Задача 15. Докажите, что сумма расстояний от ортоцентра до трёх вершин остроугольного треугольника равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.

Доказательство:
Пусть *H* - точка пересечения высот треугольника Δ*ABC*, *r* и *R* - радиусы вписанной и описанной окружностей, *O* - центр описанной окружности, d_a, d_b, d_c — расстояния от точки *O* до сторон *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Тогда по 4 свойству ортоцентра $AH = 2d_a$, $BH = 2d_b$, $CH = 2d_c$. По формуле Карно $d_a + d_b + d_c = R + r$, *тогда* $HA + HB + HC = 2d_a + 2d_b + 2d_c = 2(d_a + d_b + d_c) = 2(R + r)$.

Задача 16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, BN и CF. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AFN, FBE, NEC равен треугольнику NFE.



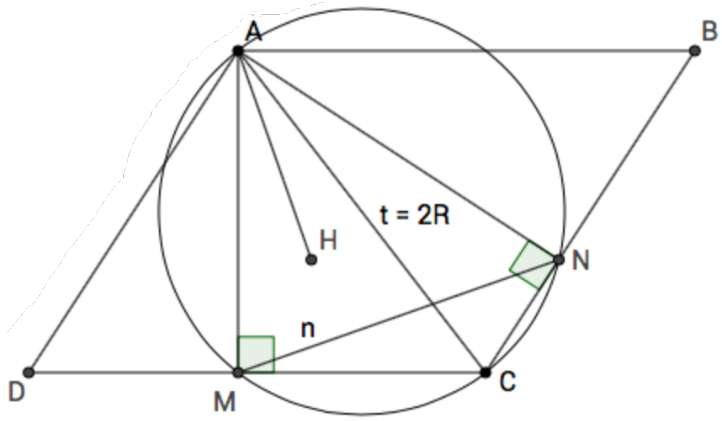
Доказательство:
Пусть H, K, L и M - ортоцентры треугольников ΔABC, ΔAFN, ΔFBE, ΔNEC. Четырёхугольник NHEC - вписанный, причём CH - диаметр описанной окружности, следовательно центр описанной окружности ΔNEC - это середина HC (точка R). Аналогично докажем, что середина HA (точка S) - центр описанной окружности ΔAFN. Пусть T и U - проекции S и R на AC соответственно. Отрезок SR - средняя линия в ΔAHC по определению, значит ST = RU. По 4 свойству ортоцентра FK = 2ST = 2RU = EM, а FK || EM, следовательно KFEM - параллелограмм по признаку => KM = FE. Аналогично докажем, что KL = NE и LM = FN. Таким образом, мы получили, что ΔLMK = ΔNFE по трём сторонам.

Задачи на применение 5 свойства

Задача 17. Докажите, что в треугольнике ABC: $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 3R^2 + OH^2$,
где H - ортоцентр, O - центр описанной окружности треугольника, R - радиус описанной окружности.
Доказательство. см. в главе Формула Гамильтона.

Задача 18. В параллелограмме ABCD из вершины тупого угла провели высоты AM и AN. Известно, что AC = t и MN = n. Найти расстояние от точки A до ортоцентра треугольника AMN.

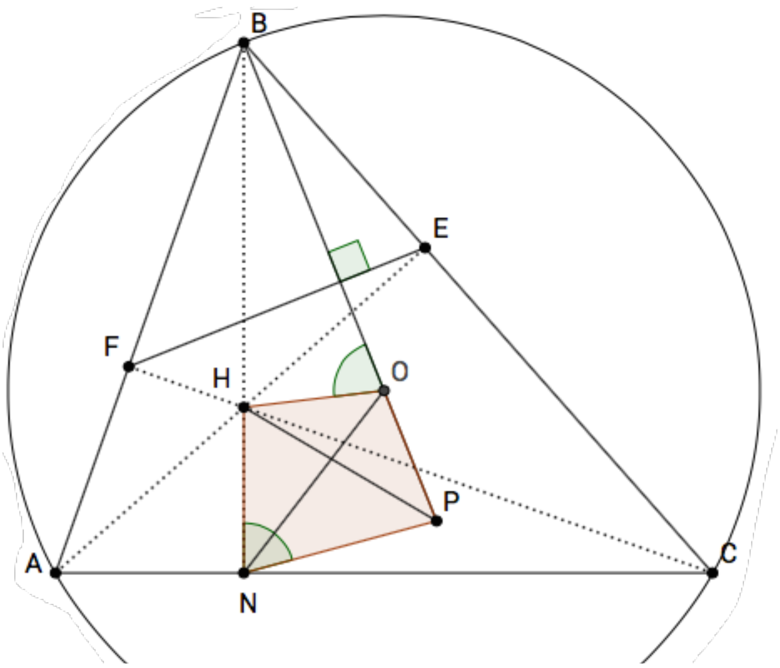
Решение.
Пусть H - ортоцентр ΔAMN. Заметим, что AC - диаметр окружности, описанной около четырёхугольника ANCM, тогда по 5 свойству ортоцентра $AH^2 = 4R^2 - n^2 = t^2 - n^2$.



Задачи на применение 6 свойства

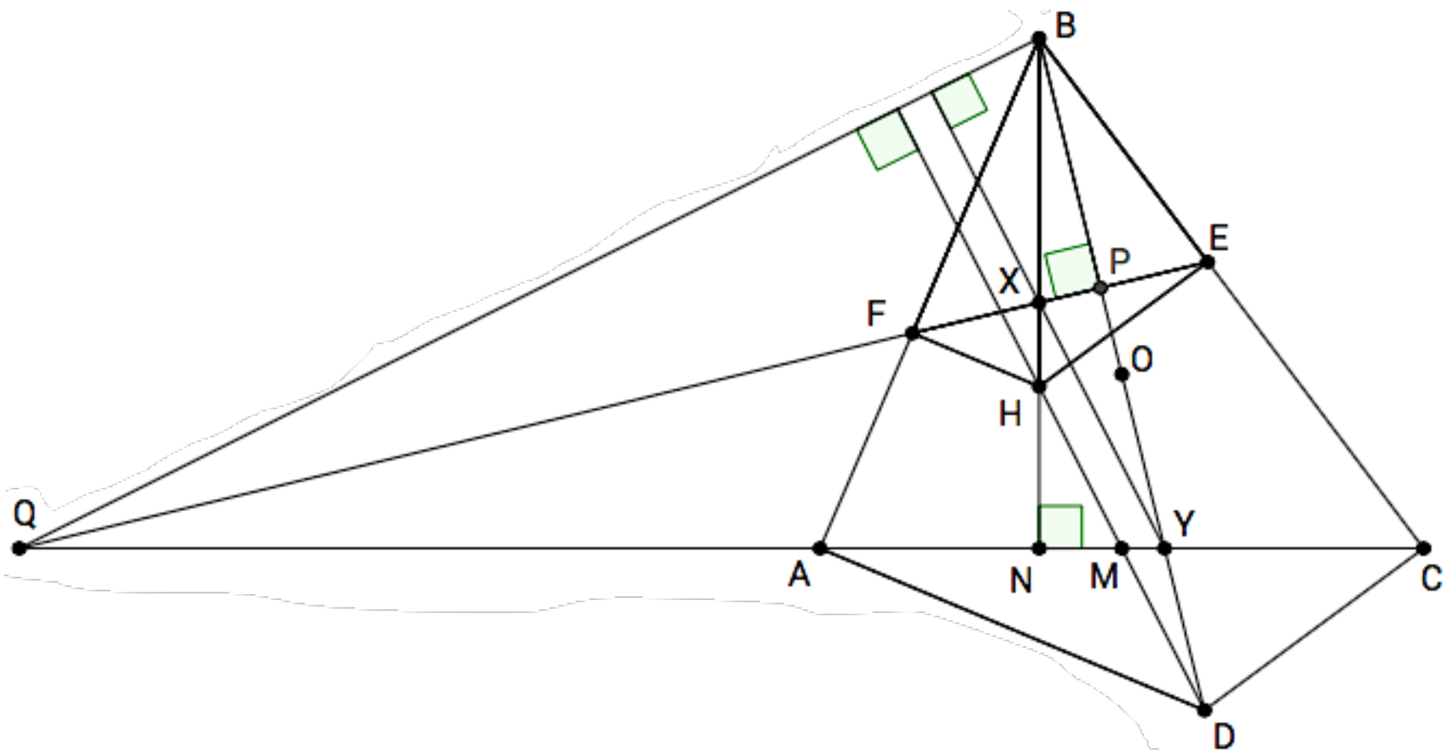
Задача 19. В остроугольном треугольнике *ABC* точка *H* — ортоцентр, *O* — центр описанной окружности, *AE*, *BN* и *CF* — высоты. Точка *P* симметрична точке *B* относительно прямой *FE*. Докажите, что точки *H*, *O*, *B* и *P* лежат на одной окружности.

Доказательство:
B и P симметричны относительно FE, значит BP ⊥ FE, а по 6 свойству ортоцентра BO ⊥ FE, следовательно точки B, O и P лежат на одной прямой. ΔABC и ΔEBF подобны => BN : $^1/_2$ BP = BO : $^1/_2$ BH (так как BN - высота, BO - радиус описанной окружности ΔABC, а $^1/_2$ BP - высота, $^1/_2$ BH - радиус описанной окружности ΔEBF) <=> BN : BP = BO : BH, следовательно ΔNBP подобен ΔOBH => ∠BNP = ∠BOH, значит четырёхугольник NHOP - вписанный по признаку, то есть точки H, O, B и P лежат на одной окружности.



Задача 20. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CF и BN. Они пересекаются в точке H. M - середина AC. Лучи CA и EF пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая MH перпендикулярна BQ.

Доказательство:
O - центр описанной окружности. Пусть BH и FE пересекаются в точке X, диаметр BD пересекает AC в точке Y, тогда по задаче 9: XY || HM. По 6 свойству ортоцентра FE ⊥ BO <=> QE ⊥ BY, следовательно в ΔDBY точка X - точка пересечения двух высот QP и BN => прямая YX проходит через ортоцентр ΔDBY, значит прямая YX ⊥ QB, а так как XY || HM, то MH ⊥ BQ.

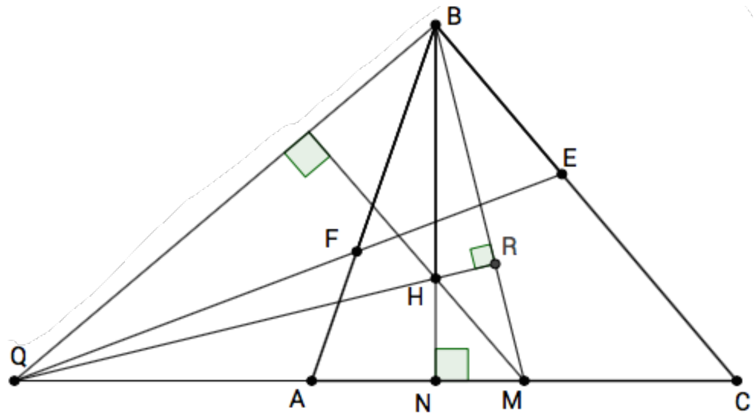


Получили, что MH ⊥ BQ, а значит точка H является ортоцентром и для треугольника ΔQBM.

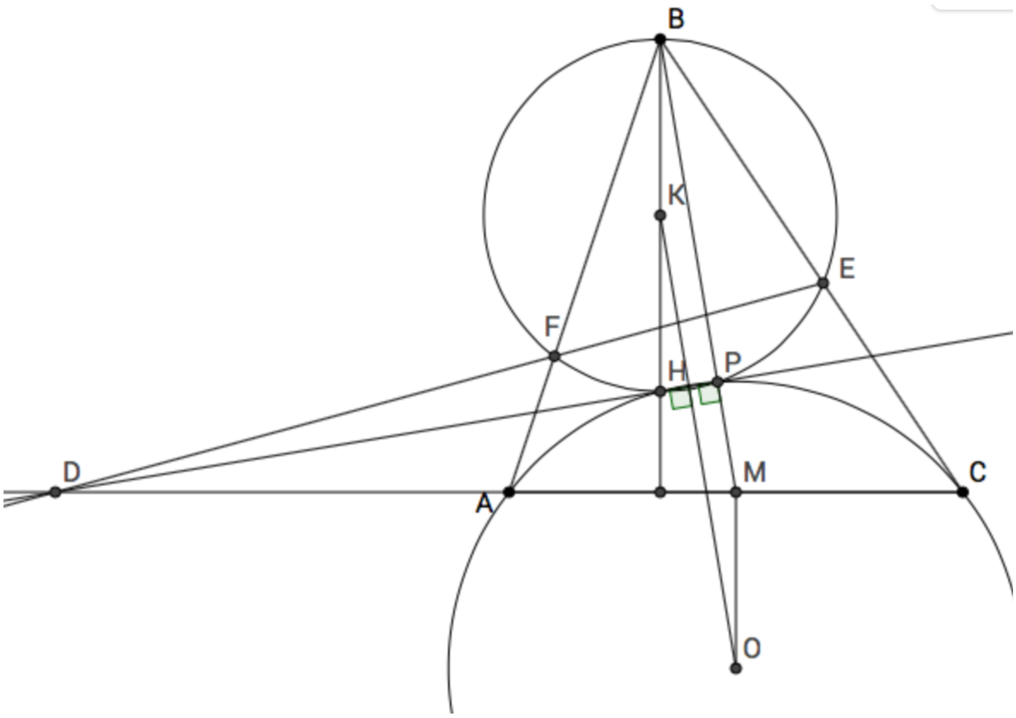
Рассмотрим 2 задачи, в которых используется данный факт.

Задача 21. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CF и BN. Они пересекаются в точке H. Лучи CA и EF пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая BH перпендикулярна медиане BM.

Доказательство:



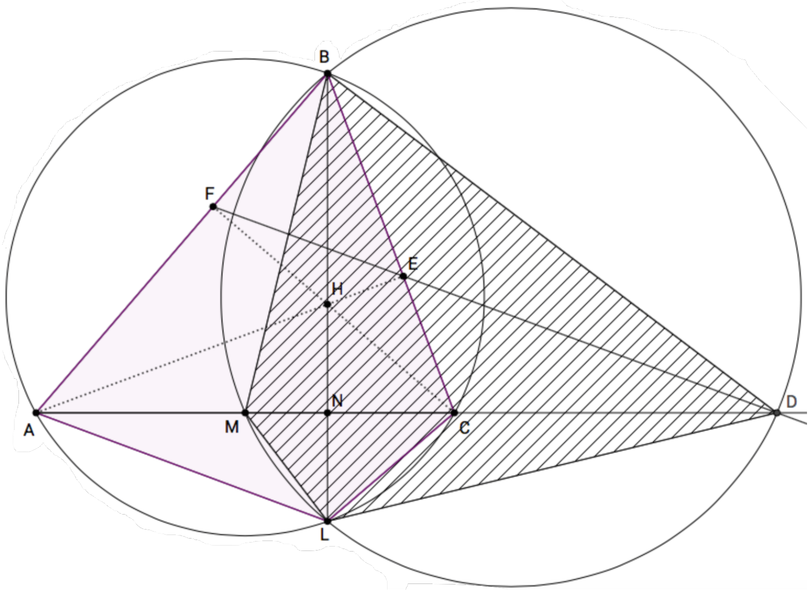
1 способ.
По задаче 20 точка H также является ортоцентром ΔQBM => прямая BH - высота, то есть прямая BH перпендикулярна стороне BM.



2 способ.
Пусть K — середина BH. Тогда по 4 свойству ортоцентра BK = OM и BK ∥ OM, значит, BMOK — параллелограмм, поэтому BM ∥ OK.
Из точек E и F отрезок BH виден под прямым углом, значит, точки E, F, B и H лежат на окружности Ω с диаметром BH. Пусть прямая DH вторично пересекает эту окружность в точке P. Тогда DH · DP = DF · DE = DA · DC, так как точки E, F, A и C - также лежат на одной окружности. Значит, AHPC - вписанный четырёхугольник по признаку.
Таким образом, отрезок HP — общая хорда окружности Ω с центром K и описанной окружности треугольника AHC, а так как общая хорда пересекающихся окружности перпендикулярна их линии центров, то HP ⊥ OK. Следовательно, DH ⊥ BM.

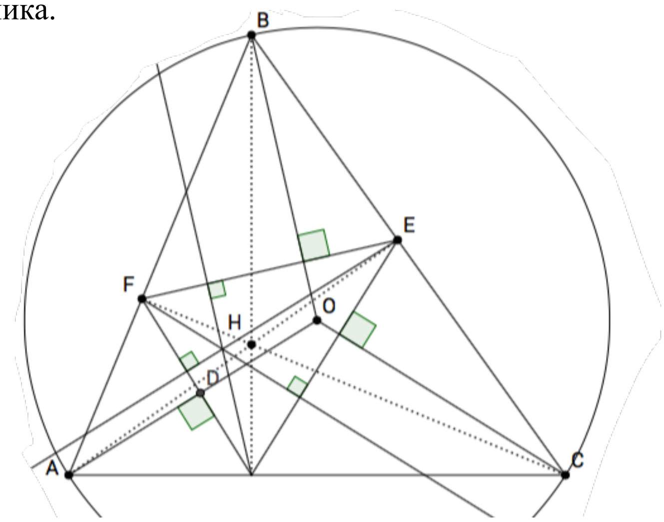
Задача 22. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CF и BN. M - середина AC. Лучи AC и FE пересекаются в точке D. Докажите, что $\frac{AN}{MN} = \frac{ND}{NC}$.

Доказательство:
1) Пусть L - точка симметричная ортоцентру H относительно стороны AC, тогда по 1 свойству ортоцентра L принадлежит описанной окружности ΔABC. Аналогично задаче 20 докажем, что точка H является ортоцентром ΔMBD, тогда по 1 свойству ортоцентра, так как L симметрична H относительно AC, точка L лежит на описанной окружности ΔMBD. Так как M, B, D и L лежат на одной окружности, то по теореме о произведении отрезков хорд MN · ND = BN · NL. Аналогично покажем, что AN · NC = BN · NL, следовательно MN · ND = AN · NC => $\frac{AN}{MN} = \frac{ND}{NC}$



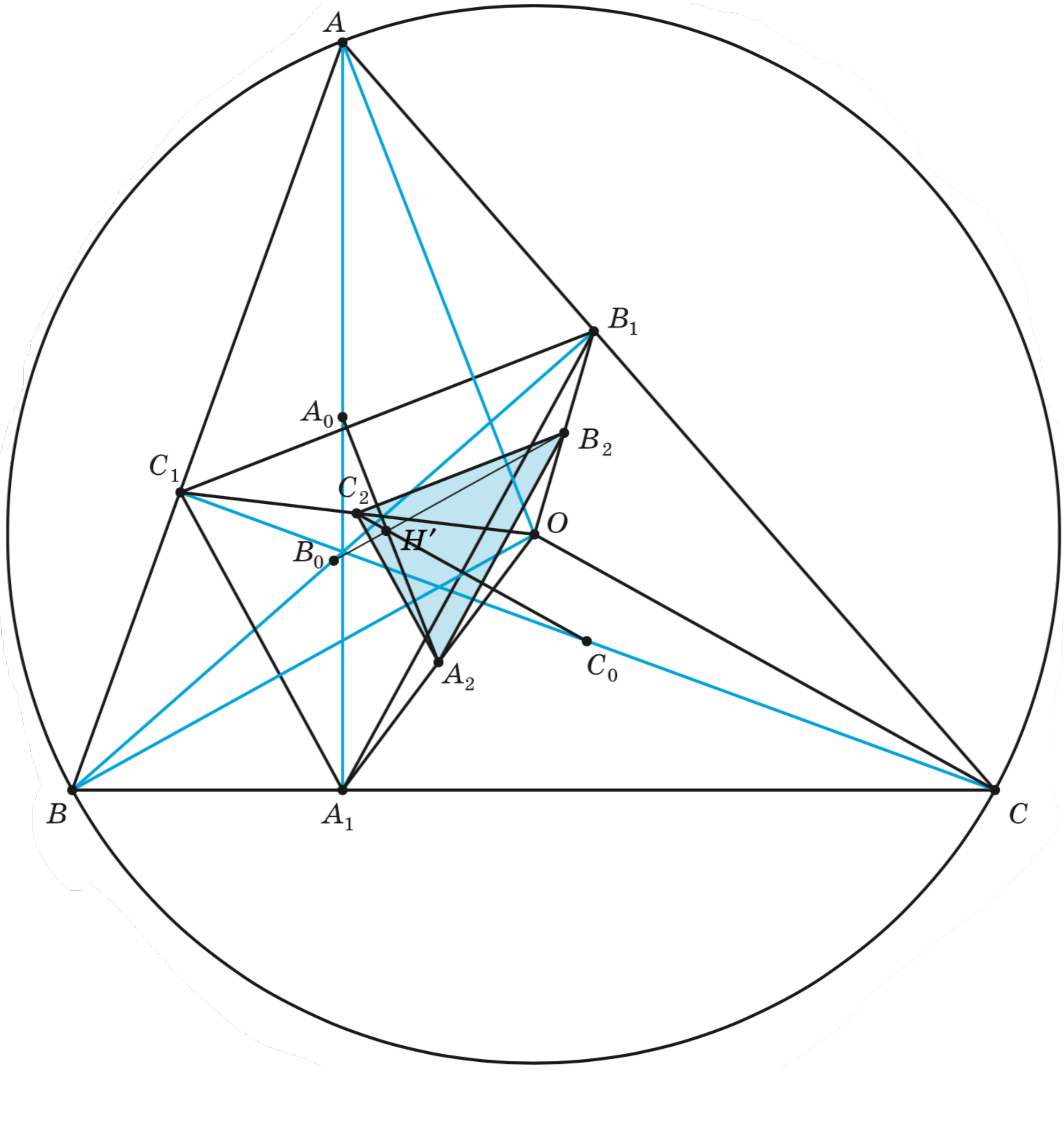
Задача 23. Пусть AE, BN и CF- высоты треугольника ABC, O - центр описанной окружности. Через точки E, N и F проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA, OB и OC. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Доказательство:
По 6 свойству ортоцентра данные радиусы перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника, значит параллельные радиусам прямые, проведённые через его вершины, перпендикулярны его сторонам, следовательно эти прямые пересекаются в одной точке как высоты ортотреугольника.



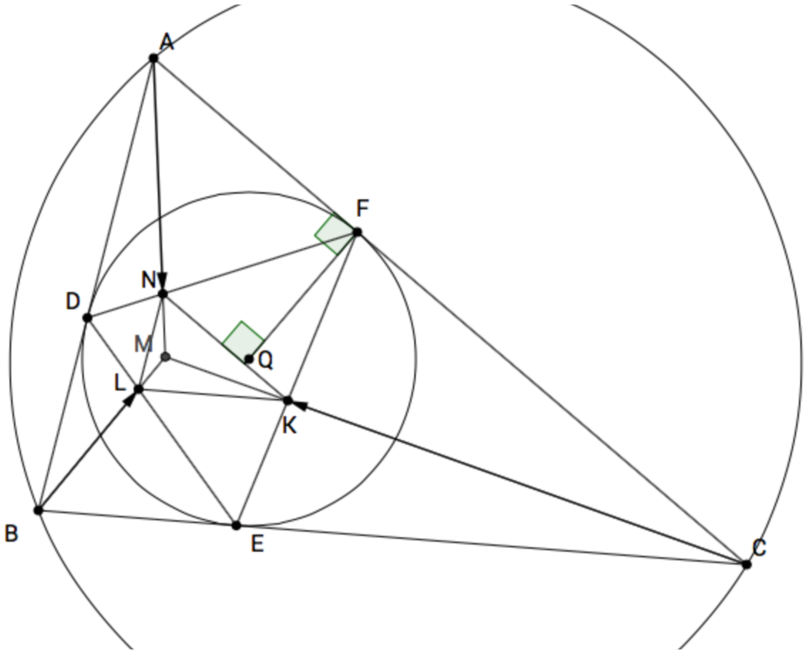
Задача 24. В треугольнике ABC O - центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины
A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Доказательство:
Отрезки, соединяющие вершины треугольника с центром его описанной окружности, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника. Значит, и прямые в условии обладают тем же свойством. Рассмотрим треугольник $\Delta A_2B_2C_2$ с вершинами в серединах отрезков, соединяющих центр описанной окружности с основаниями соответствующих высот. Тогда B_2C_2 - средняя линия треугольника ΔOC_1B_1 и потому параллельна прямой B_1C_1. С другой стороны, A_0A_2 — средняя линия треугольника ΔAA_1O, а значит, параллельна AO, то есть совпадает с данной в условии прямой a и является высотой треугольника $A_2B_2C_2$, опущенной из вершины A_2. Аналогично, прямые b и c будут двумя другими высотами рассматриваемого треугольника. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, наше утверждение доказано.



Задача 25. Вписанная окружность касается сторон BC, AC и AB треугольника *ABC* в точках E, F и D соответственно. N, L и K - основания высот в треугольнике EFD, опущенных из вершин E, F и D. Докажите, что прямые AN, BL и CK пересекаются в одной точке.

Доказательство:
По 6 свойству ортоцентра радиус FQ ⊥ NK, а так как AC - касательная к вписанной окружности, радиус FQ ⊥ AC, значит NK || AC. Аналогично докажем, что NL ||AB, LK || BC. Таким образом, ΔLNK и ΔBAC - треугольники с параллельными сторонами, следовательно они гомотетичны, а значит прямые AN, BL и CK пересекаются в одной точке (M) - в центре гомотетии.



Задача 26. Площадь треугольника равна произведению полупериметра ортотреугольника на радиус описанной окружности исходного треугольника.
Доказательство: см. задачу 32.

Задача 27. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A′ и C′. Касательные к Ω, проведённые в точках A′ и C′, пересекаются в точке B′. Докажите, что прямая BB′ проходит через центр окружности Ω.

Доказательство:
Пусть O — центр окружности Ω. B′A′ = B′C′ как отрезки касательных, значит ΔC′B′A′- равнобедренный, следовательно биссектриса B′O ⊥ A′C′, тогда, так как по 6 свойству ортоцентра OB ⊥ A′C′, точки B′, B и O лежат на одной прямой.

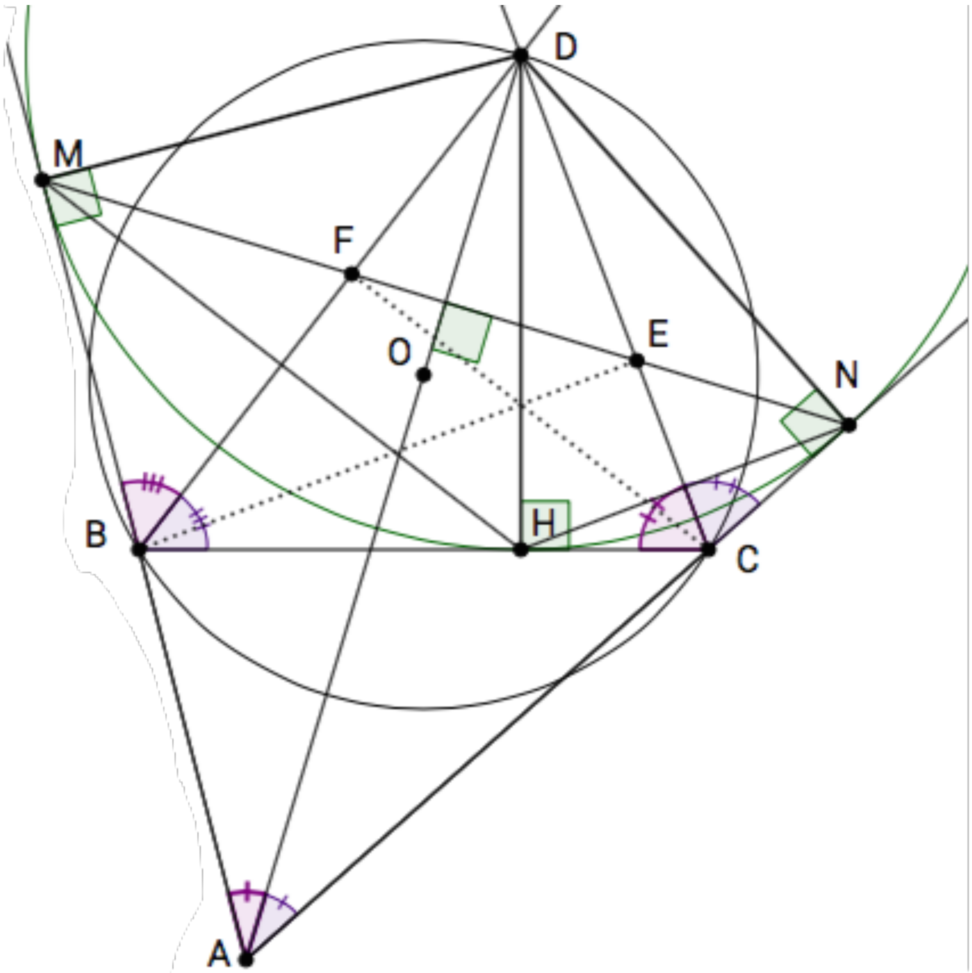
Задача 28. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке D. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BDC лежит на отрезке AD.

Доказательство:

Пусть BE, CF и DH - высоты в ΔBDC, прямые, M и N - точки симметричные H относительно проведённых биссектрис. Так как биссектрисы равноудалены от сторон соответствующих углов, то M и N лежат на лучах AB и AC соответственно. Тогда точки M, F, E и N лежат на одной прямой (см. задачу 43). Пусть ∠MBF = ∠FBC = x, ∠BCE = ∠ECN = y.

Тогда ∠BDH = 90° - x = ∠FNH (Точки C, H, F, D лежат на одной окружности с диаметром CD, значит точка N симметричная H относительно диаметра тоже лежит на этой окружности => ∠BDH, ∠FNH - вписанные, опирающиеся на одну дугу). Аналогично покажем, что ∠EMH = 90° - x. Угол ∠BMH = 180

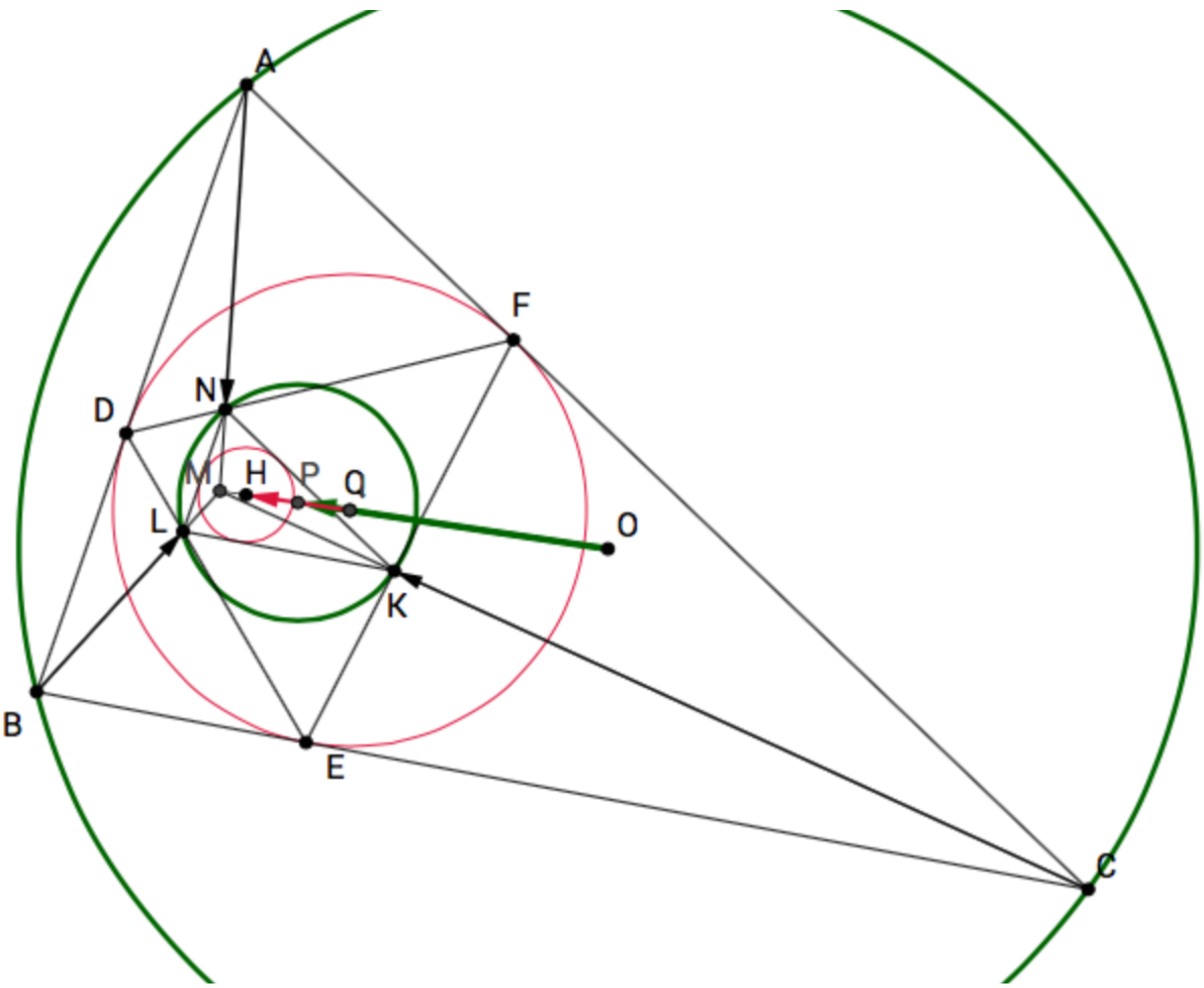
В силу симметрии ∠DHC = ∠DNC = 90° и ∠DHB = ∠DBM = 90°, тогда, так как точка D - центр вневписанной окружности ΔABC, точки M и N - точки касания этой окружности со сторонами ∠BAC, следовательно отрезки AN = AM как отрезки касательных => ΔNAM - равнобедренный, значит биссектриса AD также является высотой, то есть MN ⊥ AD => FE ⊥ AD, следовательно по 6 свойству ортоцентра центр описанной окружности ΔBDC лежит на AD.



Задачи на применение 7 свойства

Задача 29. Вписанная окружность касается сторон треугольника *ABC* в точках E, F и D. Докажите, что прямая Эйлера треугольника EFD проходит через центр описанной окружности треугольника *ABC*.

Доказательство:
Пусть N, L и K - основания высот в треугольнике EFD, опущенных из вершин E, F и D, тогда по задаче 25 ΔLNK и ΔBAC - гомотетичны (центр гомотетии точка M). Рассмотрим гомотетию, переводящую ΔBAC в ΔLNK. По 7 свойству ортоцентра точка пересечения высот (точка H) ΔEFD является инцентром ΔLNK, значит при этой гомотетии центр вписанной окружности ΔBAC (точка Q) переходит в центр вписанной окружности ΔLNK (точку H). При этой гомотетии центр описанной окружности ΔBAC (точка O) переходит в центр описанной окружности ΔLNK - центр окружности Эйлера ΔEFD, являющийся серединой серединой отрезка HQ (точка P).
Таким образом, Q → H => M, H и Q лежат на одной прямой, а значит M, H, P и Q лежат на одной прямой; O → P => O, P и M лежат на одной прямой => H, Q и O лежат на одной прямой, то есть прямая Эйлера ΔEFD проходит через центр описанной окружности треугольника *ABC*.



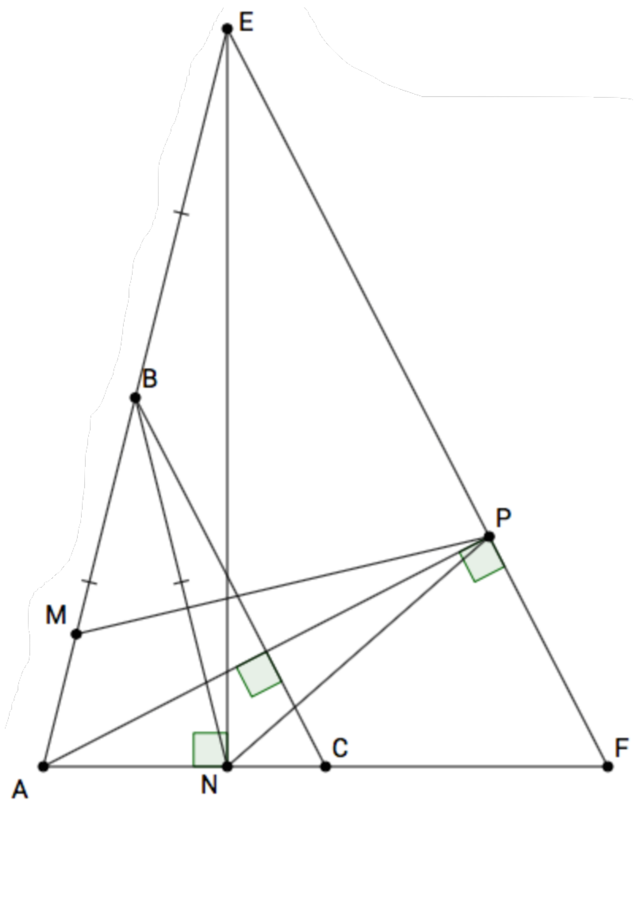
Задача 30. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись такие точки соответственно M и N, отличные от вершин, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

Доказательство:

Проведем через точку N прямую, перпендикулярную AC; пусть она пересечёт луч AB в точке E. Аналогично получим точку F.

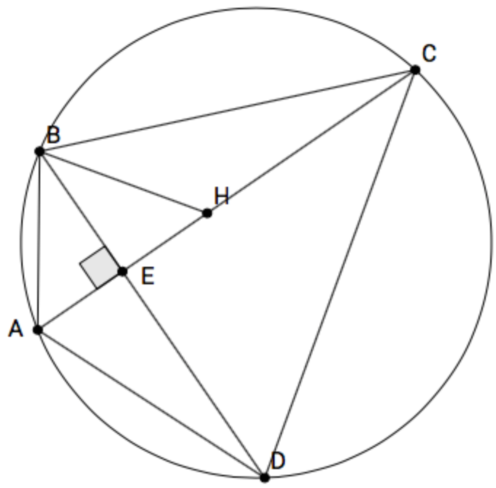
∠BNE + ∠ANB = 90° = ∠BEN + ∠BAN, а ∠ANB = ∠BAN, следовательно ∠BNE = ∠BEN => BN = BE, а AB = BN, значит AB = BE. Аналогично докажем, что AC = CF. Таким образом, отрезок BC соединяет середины AE и AF.

Проведём высоту AP в ΔFAE, тогда по теореме Фалеса средняя линия BC разделит её пополам. Так как BC || EF, то AP ⊥ BC, следовательно точка P симметрична A относительно BC по определению. По 7 свойству ортоцентра высота PA является биссектрисой угла ортотреугольника ∠MPA.



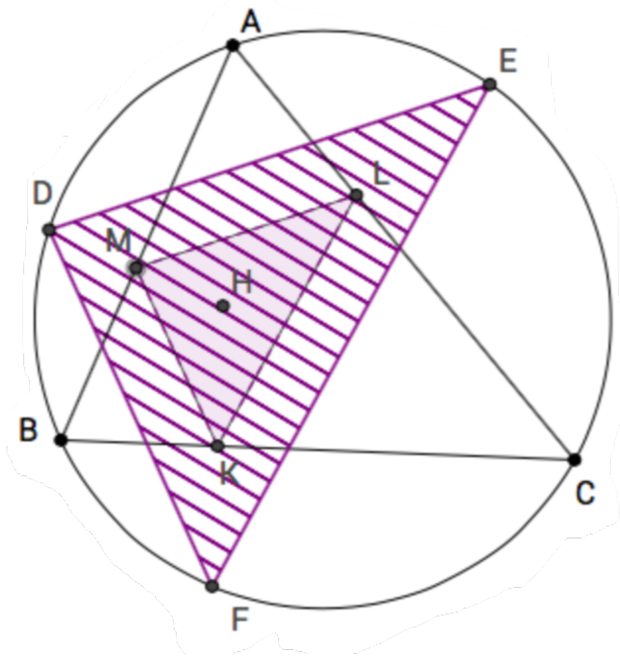
ГЛАВА 2
Задачи, на применение нескольких свойств ортоцентра

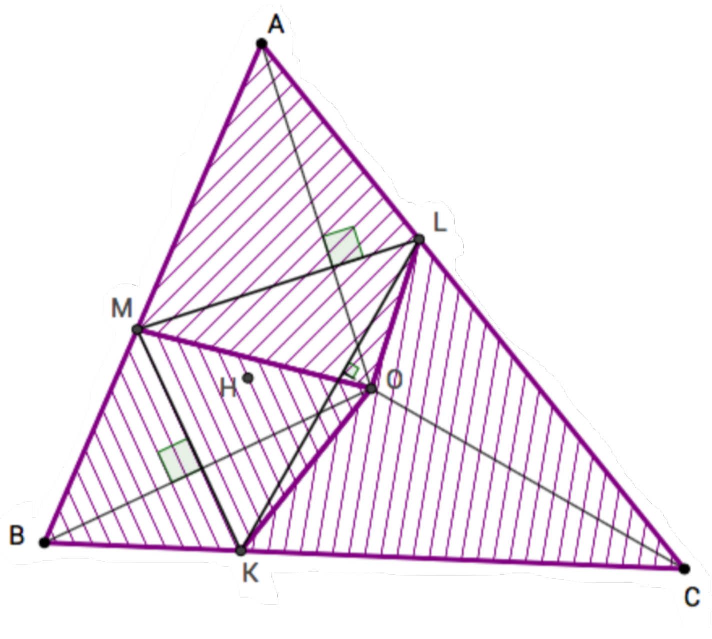
Задача 31. *Задача Архимеда.* Сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит взаимно перпендикулярные хорды, равна квадрату диаметра окружности.



Доказательство:
Пусть H - ортоцентр ΔBCD, тогда, так как точка A лежит на его описанной окружности, по свойству 1 точки H и A симметричны относительно BC, значит BA = BH. По свойству 5:
$BH^2 + CD^2 = 4R^2 = D^2$
$BA^2 + CD^2 = D^2$, тогда так как по теореме Пифагора $BA^2 = BE^2 + AE^2$ и $CD^2 = CE^2 + DE^2$,
то $BE^2 + AE^2 + CE^2 + DE^2 = D^2$**.**

Задача 32. В ΔABC стороны ортотреугольника равны 26, 28, 30. Найдите площадь ΔABC.



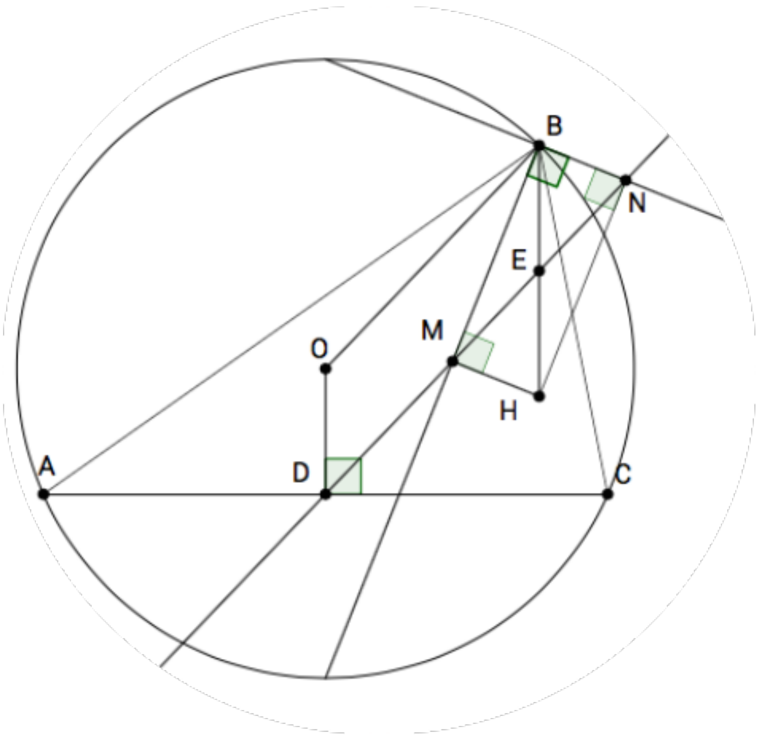


Решение:
Опишем окружность около ΔABC (ω). При гомотетии с центром в ортоцентре (H) и коэффициентом 2 ортотреугольник (ΔKML) перейдёт в треугольник (ΔFDE) с вершинами на окружности ω по 1 свойству ортоцентра => описанные окружности ΔFDE и ΔABC совпадают, значит радиус R описанной окружности ΔABC в 2 раза больше радиуса описанной окружности ортотреугольника.
По теореме косинусов $\cos\angle A = (26^2 + 28^2 - 30^2) / (2 \cdot 26 \cdot 28) = 5/13$, значит $\sin\angle A = (1 - \cos^2\angle A)^{1/2} = (1 - 25/169)^{1/2} = 12/13$, тогда по теореме синусов $R = 2 \cdot (30/2\sin\angle A) = 30 \cdot 13 / 12 = 65/2$.
По 6 свойству ортоцентра радиусы ω перпендикулярны сторонам ортотреугольника => $AO \perp ML$, тогда $S_{\Delta AMOL} = {}^1/_2\, ML \cdot AO \cdot \sin(90°) = {}^1/_2\, ML \cdot R$. Аналогично получим, что $S_{\Delta BMOK} = {}^1/_2\, MK \cdot R$, $S_{\Delta KOLC} = {}^1/_2\, KL \cdot R$ => $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BMOK} + S_{\Delta KOLC} + S_{\Delta AMOL} = {}^1/_2\, R \cdot (ML + MK + KL) =$
$= {}^1/_2\, P \cdot R = pR = (26 + 28 + 30) \cdot 65 / 4 = 1365.$ $\underline{(S_\Delta = p_H R)}$

Ответ: 1365.

Задача 33. Пусть *M* и *N* — проекции точки пересечения высот треугольника *ABC* на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине *B*. Докажите, что прямая *MN* делит сторону *AC* пополам.

Доказательство:
Угол между биссектрисами смежных углов прямой, значит $\angle MBN = 90°$. Углы $\angle HMB$ и $\angle HNB$ - тоже прямые, следовательно MBNH - прямоугольник. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, тогда BE = EH. По 4 свойству ортоцентра $OD = {}^1/_2\, BH$, где O - центр описанной окружности ΔABC, а D - проекция точки O на AC. Следовательно OD = BE, а OD || BE => DOBE - параллелограмм по признаку, значит OB || DE.
По 3 свойству ортоцентра $\angle OBM = \angle MBH$, а $\angle MBH = \angle MNH$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу, следовательно $\angle OBM = \angle MNH$, тогда, так как MB || HN, OB || MN. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной, значит, так как OB || DE и OB || MN <=> OB || ME, прямые DE и ME совпадают, прямая MN пересекает AC в точке D, середине AC.



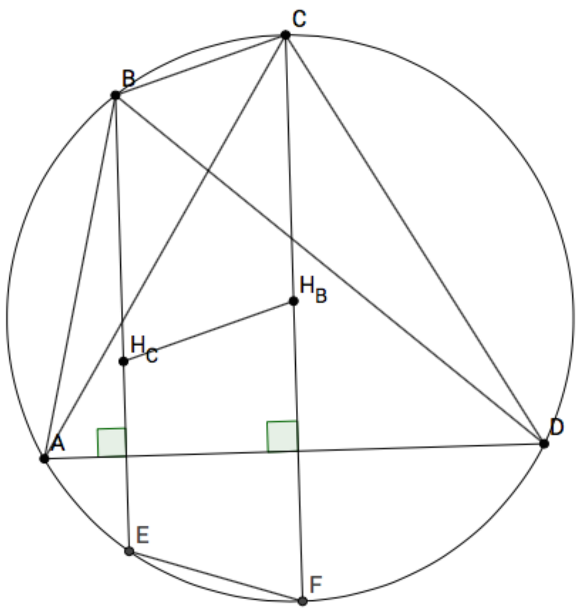
Задача 34. ABCD – вписанный четырехугольник. H_C и H_B – ортоцентры треугольников ABD и ACD. Докажите, что H_CH_B = BC.

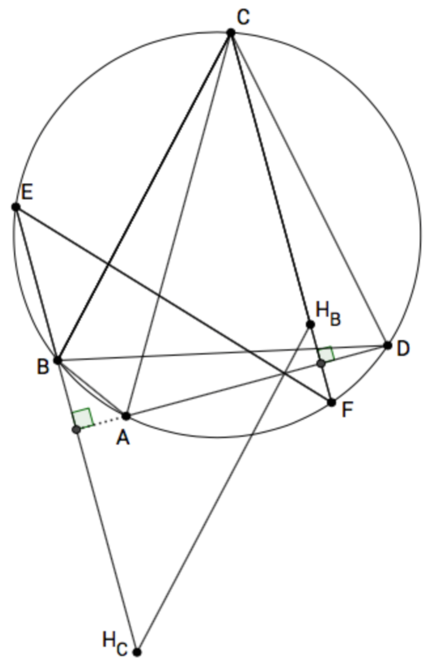
Доказательство:

1 способ(левый рисунок). Пусть лучи BH_C и CH_B пересекут описанную окружность ABCD в точках E и F соответственно. По свойству 1 эти точки симметричны точкам H_C и H_B относительно AD, значит FEH_CH_B - равнобокая трапеция, следовательно EF = H_CH_B.

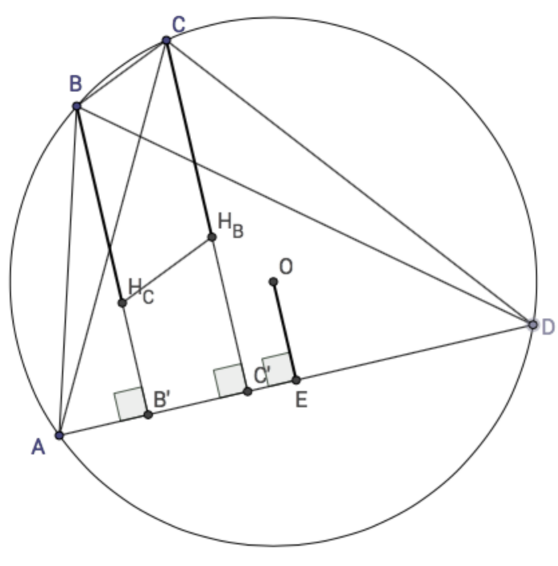
BE || CF => FEBC - трапеция по определению. Точки F, E, B, C лежат на одной окружности, следовательно FEBC - вписанная трапеция, а значит равнобокая по признаку, поэтому EF = BC. Следовательно EF = <u>H_CH_B = BC.</u>

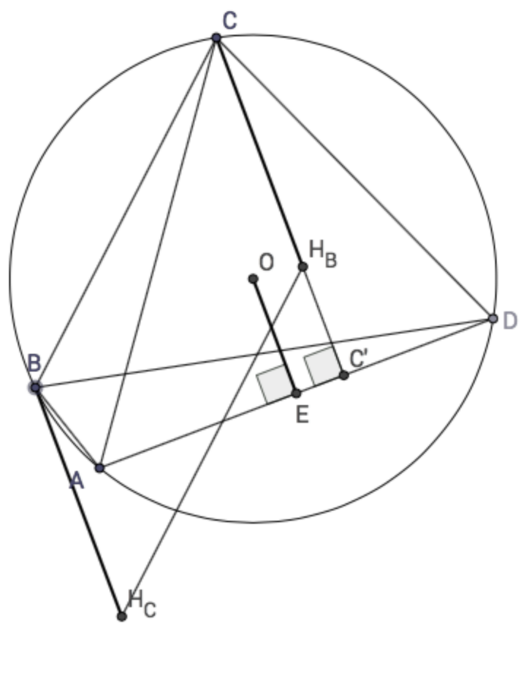
В случае, если ΔABD тупоугольный(правый рисунок), доказательство аналогично: FBEC, EH_CFH_B - равнобокие трапеции, значит EF = BC и EF = H_CH_B => <u>H_CH_B = BC.</u>





2 способ. Пусть OE - расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника, тогда по 4 свойству ортоцентра BH_C = 2OE и CH_B = 2OE, следовательно BH_C = CH_B, а BH_C || CH_B, значит BCH_BH_C - параллелограмм по признаку => <u>H_CH_B = BC.</u>

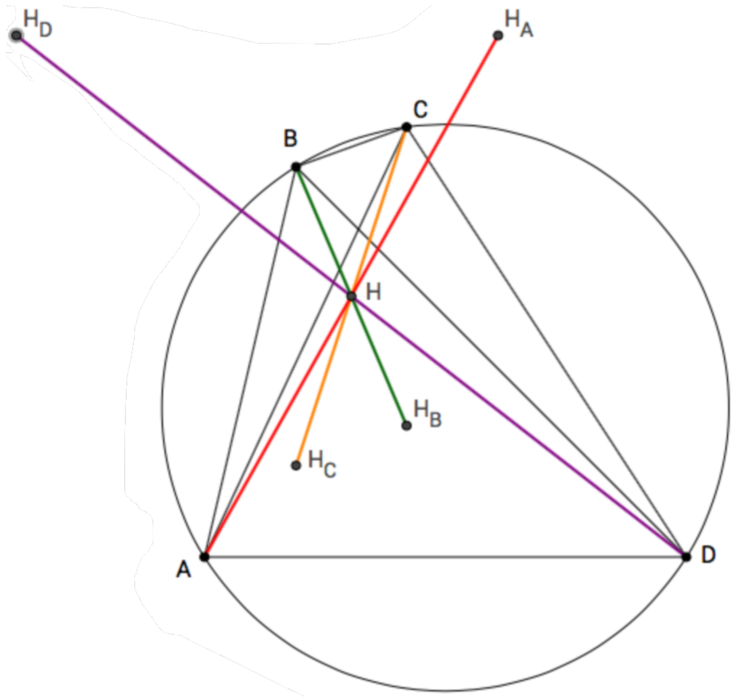




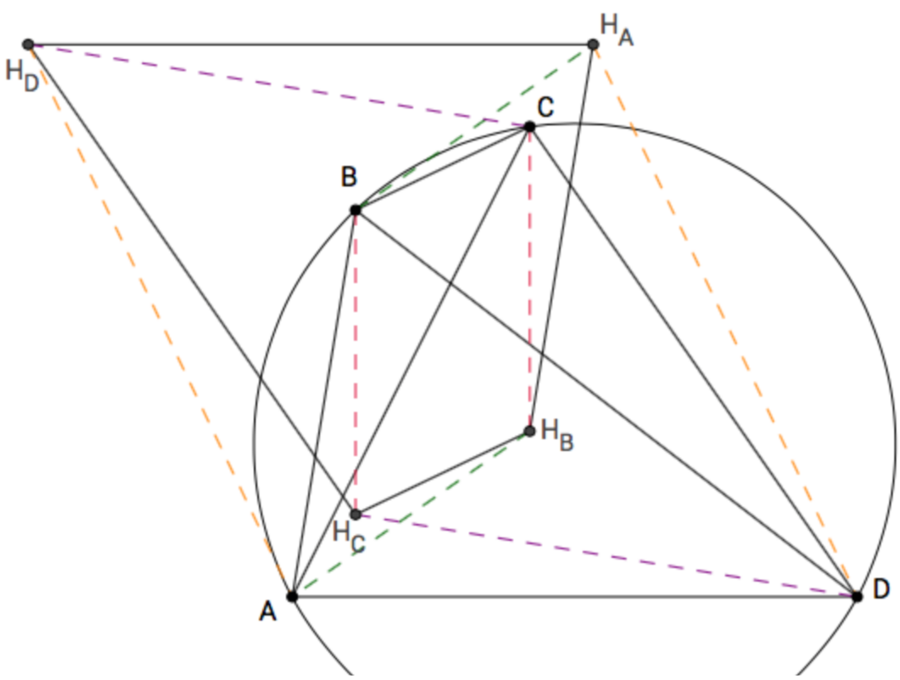
Эта задача поможет нам доказать 2 красивых факта и теорему Монжа.

1) Аналогично точкам H_B и H_C определим точки H_A, H_D. Тогда оказывается, что прямые AH_A, BH_B, CH_C, DH_D пересекаются в одной точке.

Доказательство:
BCH_BH_C - параллелограмм, поэтому отрезки BH_B и CH_C точкой пересечения делятся пополам. Аналогично убеждаемся, что любая пара из наших отрезков делится точкой пересечения пополам, поэтому все четыре отрезка имеют общую середину, общую точку.



2) При симметрии относительно общей середины отрезков (точки H) точки A, B, C и D переходят в симметричные им H_A, H_B, H_C и H_D соответственно, то есть четырёхугольник ABCD переходит в $H_AH_BH_CH_D$, следовательно ортоцентры треугольников ΔABC, ΔADC, ΔBDC и ΔABD составляют четырехугольник, равный ABCD.



3) *Теорема Монжа.*

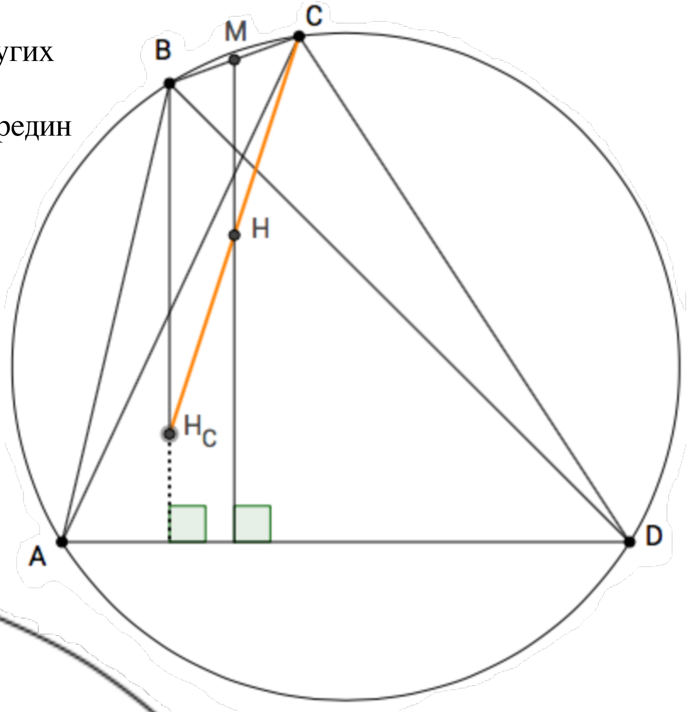
Точка H, точка пересечения прямых AH_A, BH_B, CH_C, DH_D - ортоцентр вписанного четырёхугольника ABCD.

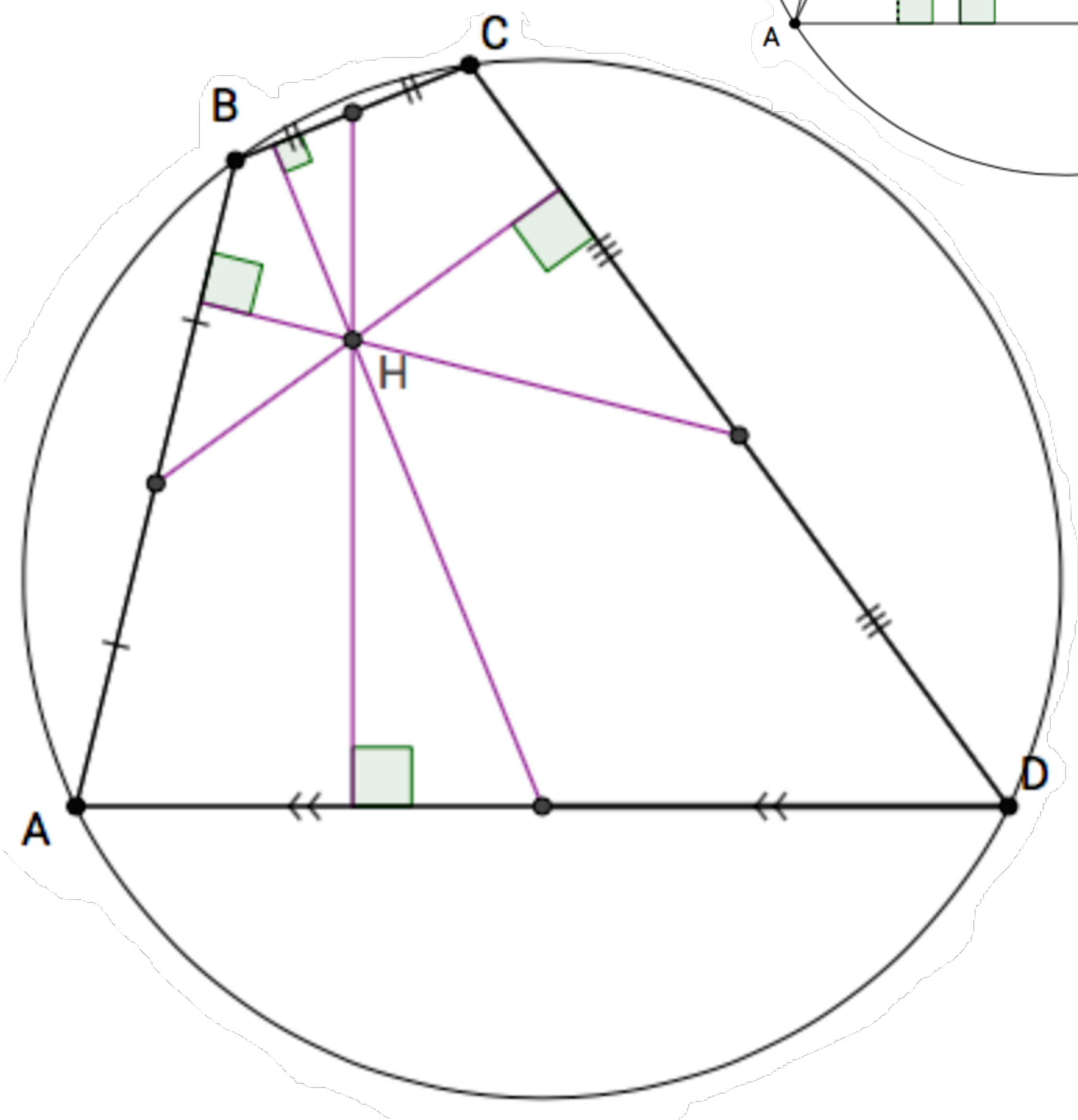
Пусть M - середина стороны BC вписанного четырёхугольника ABCD. Проведём прямую MH.

H - середина отрезка CH_C, значит MH - средняя линия для треугольника ΔBCH_C => $MH \parallel BH_C$, а $BH_C \perp AD$, поэтому $MH \perp AD$, то есть перпендикуляр, опущенный из середины M стороны BC на противоположную сторону AD, проходит через ортоцентр H этого четырёхугольника.

Аналогичное утверждение верно для середин и других сторон.

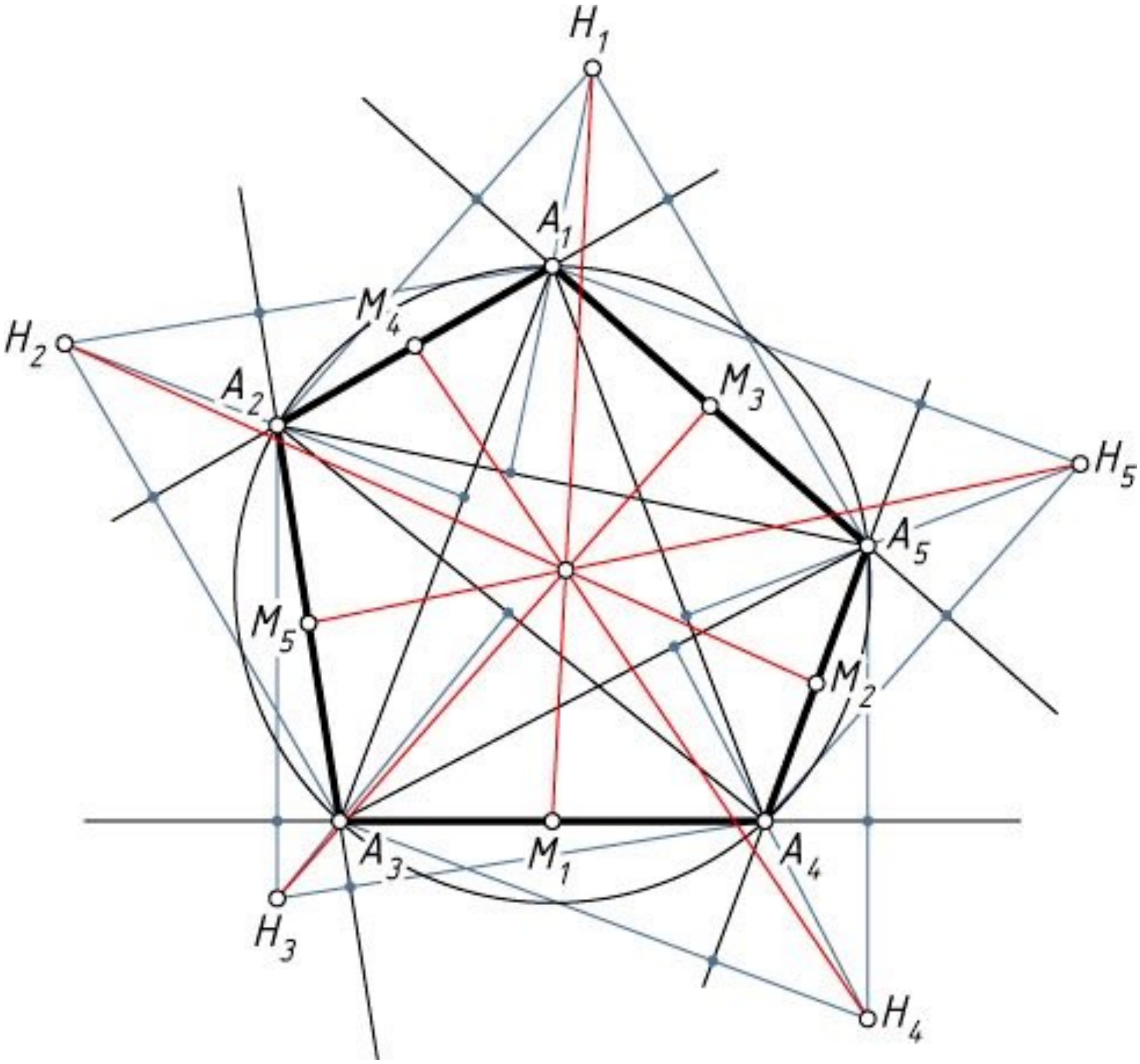
Получили, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон на противолежащие стороны вписанного четырёхугольника, пересекаются в одной точке - ортоцентре вписанного четырёхугольнике.





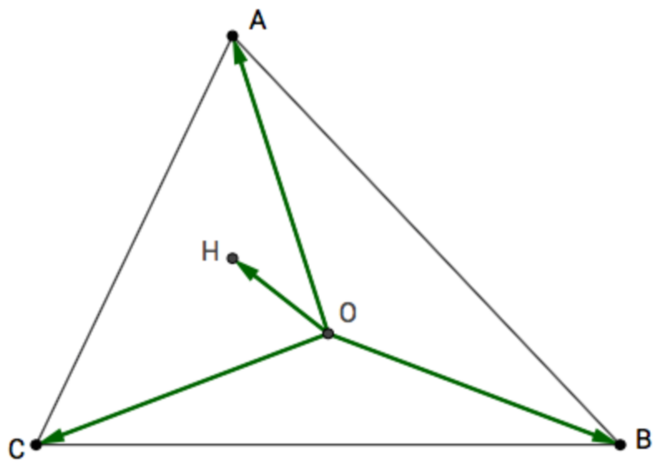
Задача 35. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — вписанный выпуклый пятиугольник, H_1 — ортоцентр треугольника $A_2A_1A_5$, M_1 — середина стороны A_3A_4, l_1 — прямая, проходящая через точки H_1 и M_1. Аналогично определяются прямые l_2, l_3, l_4 и l_5. Докажите что все эти прямые l_i пересекаются в одной точке.

Доказательство.
Пусть H_2 — ортоцентр треугольника $\Delta A_3A_2A_1$, M_2 — середина стороны A_4A_5, l_2 — прямая, проходящая через точки H_2 и M_2.
По 30 задаче $H_1H_2 \parallel A_3A_5$ и $H_1H_2 = A_3A_5$, а так как M_1M_2 — средняя линия треугольника $\Delta A_3A_4A_5$, то $M_1M_2 \parallel A_3A_5$ и $M_1M_2 = {}^1/_2A_3A_5$. Поэтому $M_1M_2 \parallel H_1H_2$ и $M_1M_2 = {}^1/_2H_1H_2$.
Значит, отрезки H_1M_1 и H_2M_2 пересекаются и делятся точкой пересечения в отношении 1 : 2, считая от точек M_1 и M_2. Аналогично для любой пары соответствующих отрезков.
Следовательно, все прямые l_i проходят через одну точку.



ГЛАВА 3
Формула Гамильтона

Формула Гамильтона имеет вид : $\mathbf{\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}$, где A, B, C - вершины треугольника, H - его ортоцентр, а O - центр описанной окружности.

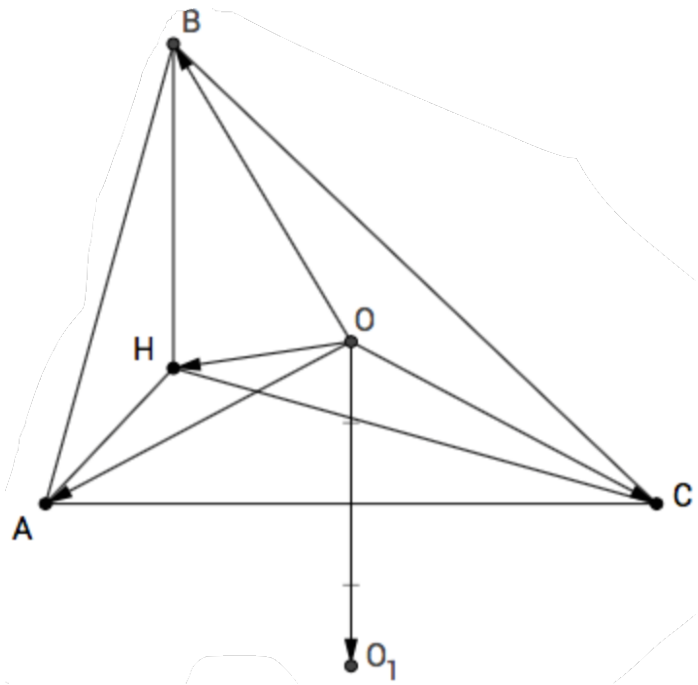


Доказательство.

1 способ. Построим точку O_1 симметричную точке O. $AOCO_1$ - параллелограмм, следовательно $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO_1}$.

По 4 свойству ортоцентра $BH = OO_1$, а $BH \parallel OO_1$, значит четырёхугольник $HBOO_1$ - параллелограмм, следовательно $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OH}$. Таким образом,

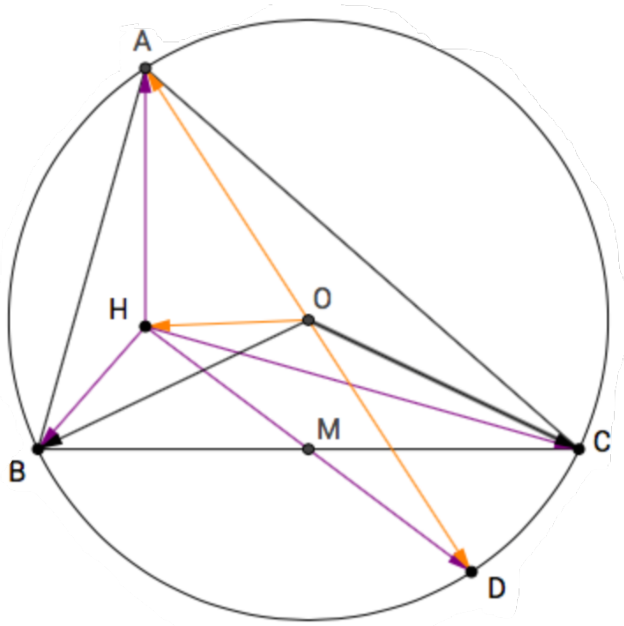
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.



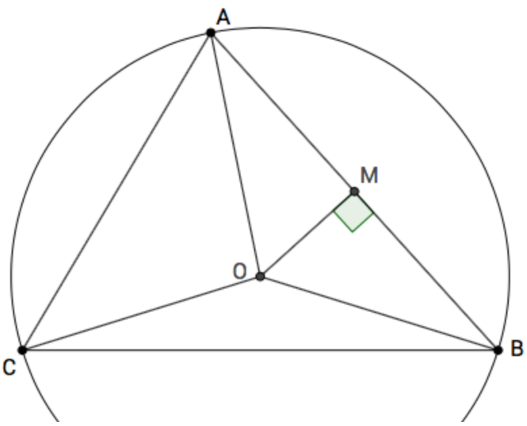
2 способ.

$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}$. Поскольку $AO = OD$, то $\overrightarrow{HO} = {}^1/_2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD})$,

$\overrightarrow{HO} = {}^1/_2(3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, откуда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



Задача 36. Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где H - ортоцентр, O - центр описанной окружности треугольника, R - радиус описанной окружности, a, b и c - стороны треугольника.



Доказательство:
Пусть M - проекция точки O на AB, тогда

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 \cdot \cos\angle AOB = R^2 \cdot \cos(2\angle AOM) = R^2 \cdot (1 - 2\sin^2(\angle AOM)) = R^2 \cdot (1 - 2 \cdot a^2 / 4R^2) = R^2 - a^2 / 2$

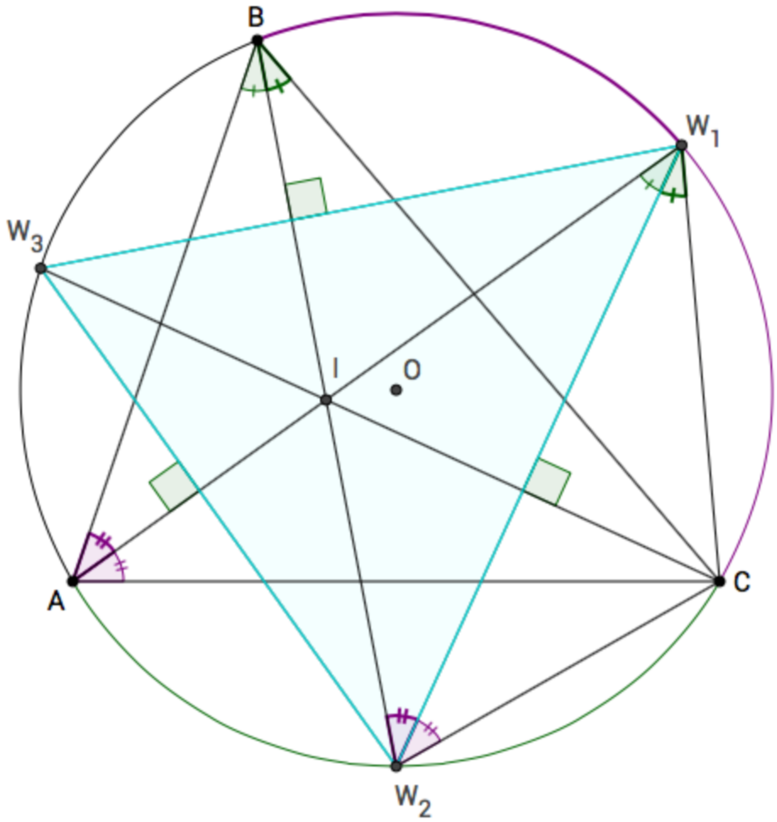
Возведём обе части формулы Гамильтона в квадрат, получим $OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 +$ $+ 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 3R^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) = 3R^2 + 2(R^2 - a^2 / 2 + R^2 - b^2 / 2 + R^2 - c^2 / 2) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Следствия из формулы Гамильтона:

1) неравенство <u>$9R^2 > a^2 + b^2 + c^2$</u>

2) По 5 свойству ортоцентра $AH^2 = 4R^2 - a^2$, $BH^2 = 4R^2 - b^2$ и $CH^2 = 4R^2 - c^2$, следовательно $\underline{AH^2 + BH^2 + CH^2} = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2 + 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = \underline{3R^2 + OH^2}$.

Задача 37. Дан треугольник ABC, I - центр вписанной окружности, W_1, W_2, W_3 - точки пересечения биссектрис с описанной окружностью, центр которой - точка O. Докажите, что $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OW_1} + \overrightarrow{OW_2} + \overrightarrow{OW_3}$.



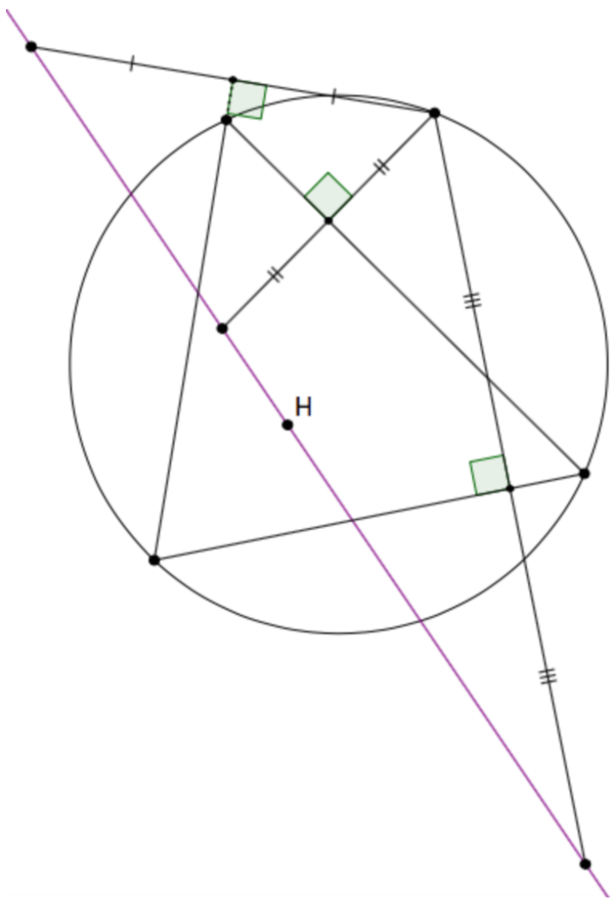
Доказательство:
$ABW_2 = AW_1W_2$ и $W_2BC = W_2W_1C$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а, так как BW - биссектриса, $ABW_2 = W_2BC$, следовательно $AW_1W_2 = W_2W_1C$, а значит лучи W_1A и W_1C симметричны относительно W_1W_2. Аналогично докажем, что лучи W_2B и W_2C симметричны относительно W_1W_2. Следовательно точки пересечения лучей W_1A и W_2B, W_1C и W_2C симметричны относительно W_1W_2, то есть точки I и C симметричны относительно W_1W_2, а значит $IC \perp W_1W_2 \Leftrightarrow W_3C \perp W_1W_2$. Аналогично докажем, что $W_1A \perp W_2W_3$ и $W_2B \perp W_1W_3$. Таким образом лучи W_1A, W_2B и W_3C содержат высоты $\Delta W_1W_2W_3$, а значит точка их пересечения (I) является ортоцентром этого треугольника, тогда по формуле Гамильтона $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OW_1} + \overrightarrow{OW_2} + \overrightarrow{OW_3}$.

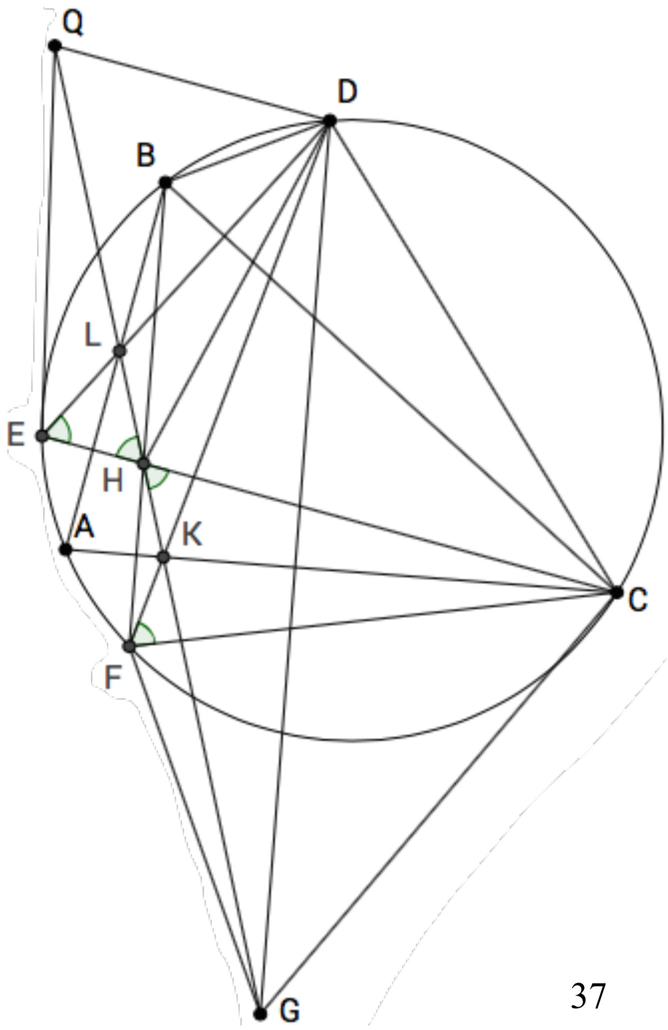
ГЛАВА 4
Свойство прямой Штейнера

Точку D описанной окружности ΔABC отразим относительно сторон треугольника. Полученные точки будут лежать на одной прямой, которая называется <u>*прямой Штейнера*</u> точки D относительно ΔABC.

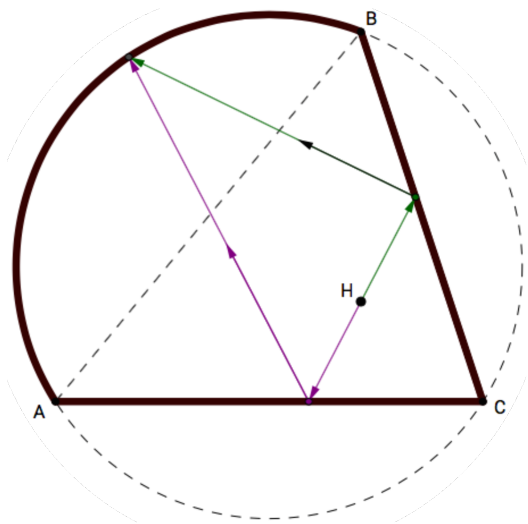
Задача 38. Докажите, что *прямая Штейнера проходит через ортоцентр ΔABC*.

Доказательство.
Построим точки E и F симметричные ортоцентру H относительно сторон AB и AC соответственно. По 1 свойству ортоцентра E и F лежат на описанной окружности ΔABC. Пусть DE пересечёт AB в точке L, а DF пересечёт AC в точке K. В силу симметрии ∠ELA = ∠HLA и ∠DLB = ∠QLB, тогда, так как ∠DLB = ∠ELA как вертикальные, ∠QLB = ∠HLA => точка L лежит на отрезке QH. Аналогично докажем, что точка K лежит на отрезке GH.
В силу симметрии <u>∠LHE</u> = ∠LEH = <u>∠DEC</u> и ∠*KHC* = ∠KFC = ∠*DFC*, а углы <u>∠DEC</u> = ∠*DFC* как вписанные, опирающиеся на одну дугу DC => ∠LHE = ∠KHC => ∠QHE = ∠GHC, следовательно Q, H и G лежат на одной прямой, то есть *прямая Штейнера проходит через ортоцентр ΔABC.*





Задача 39. На бильярдном столе сложной формы (см. рисунок) два шара столкнулись прямо в ортоцентре треугольника , а потом разлетелись в противоположных направлениях и абсолютно упруго оттолкнулись от стенок AC и BC. Докажите, что они снова столкнуться на дуге-стенке AB.



За этой задачей кроется факт, обратный свойству прямой Штейнера: если через ортоцентр треугольника провести произвольную прямую, то прямые, ей симметричные относительно сторон треугольника, будут пересекаться в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника, для которой проведённая произвольная прямая является прямой Штейнера.

Доказательство.

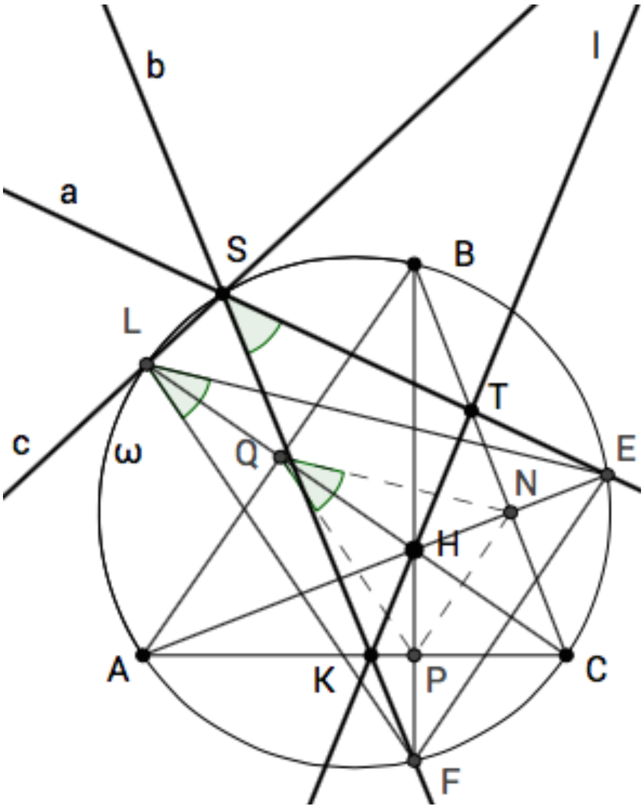
Введём обозначения. l - произвольная прямая проходящая через ортоцентр, a, b и c - прямые, симметричные ей относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Прямая l пересекает BC в точке T, а AC - в K. N, P и Q - основания высот треугольника ABC. ω - окружность, описанная около ΔABC.

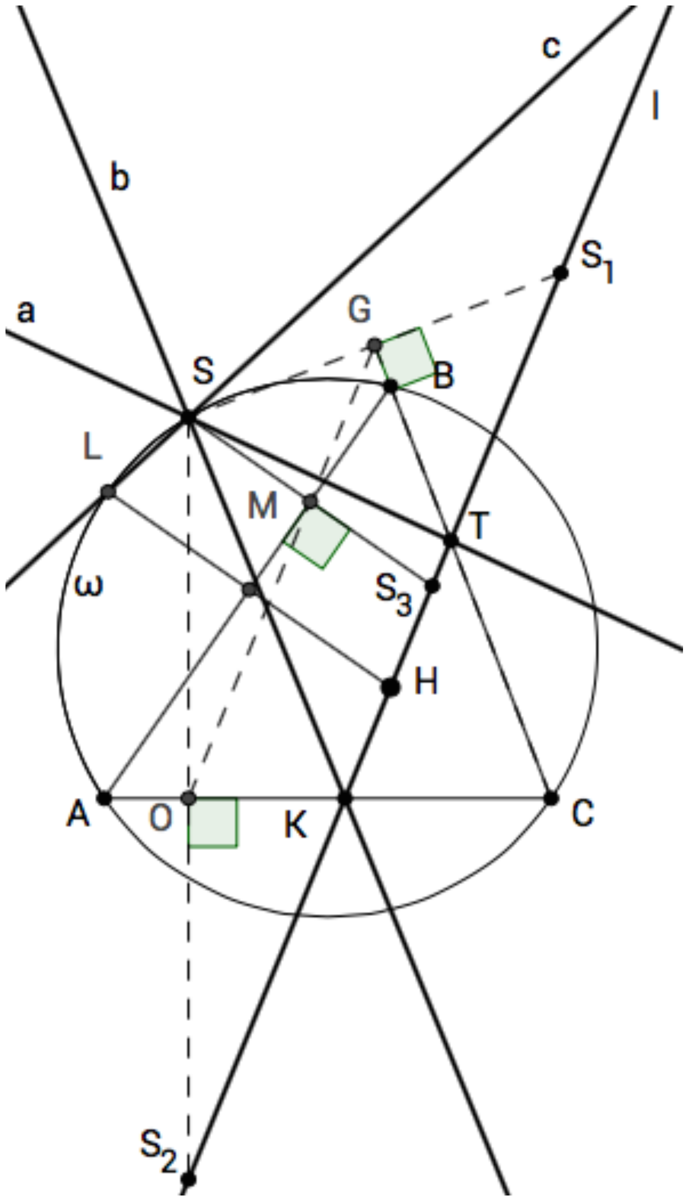
Пусть E, F и L - образы точки H при симметрии относительно сторон ΔABC, тогда по 1 свойству ортоцентра, они лежат на ω. Так как H лежит на l, то симметричные ей относительно сторон прямые a, b, c проходят через точки E, F, L соответственно.

Пусть прямые a и b пересекаются в точке S под углом α. В силу симметрии TC и KC - внешние биссектрисы ΔKST, значит ∠KCT = 90° - $^1/_2$ α = ∠ACB. По 7 свойству ортоцентра ∠ACB = ∠BQN = ∠AQP, значит ∠PQN = 180° - 2(90° - $^1/_2$ α) = α. При гомотетии с центром H и коэффициентом 2 ΔPQN перейдет в ΔFLE, следовательно ∠FLE = ∠PQN = α => ∠FLE = ∠FSE = α, тогда, так как ∠FLE, ∠FSE опираются на одну дугу FE, четырёхугольник FLSE - вписанный, а значит точка S принадлежит окружности ω.

Построим точку S_1, симметричную S относительно прямых BC. Она окажется на прямой l, симметричной прямой a относительно BC. Так как прямая l проходит через точку S_1 и ортоцентр H, l - прямая Штейнера точки S относительно ∆ABC по определению, значит точка S_3, симметричная S относительно стороны AB, также принадлежит l.

Таким образом, отрезки LS и HS_3 симметричны относительно AB, следовательно прямые LS и l симметричны относительно AB, значит прямая LS совпадает с прямой c. Мы получили, что прямые a, b и c пересекаются в точке S, лежащей на описанной окружности треугольника, причём прямая l - это прямая Штейнера для точки S относительно ∆ABC.



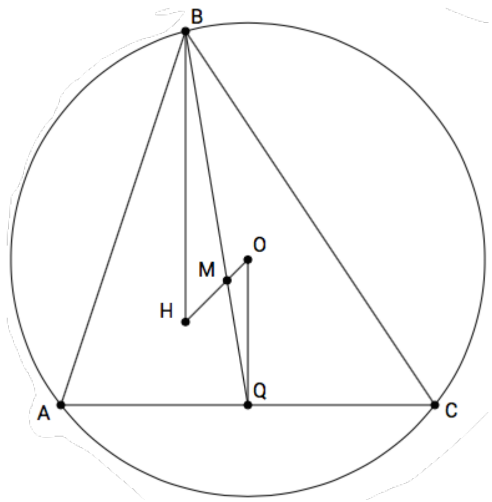


ГЛАВА 5
Прямая и окружность Эйлера

Прямая Эйлера - это прямая, проходящая через центр описанной окружности, ортоцентр и центроид треугольника.

Задача 13. Если H - ортоцентр треугольника, а O - центр описанной окружности, точка пересечения медиан M лежит на отрезке HO, причём HM : MO = 2 : 1.

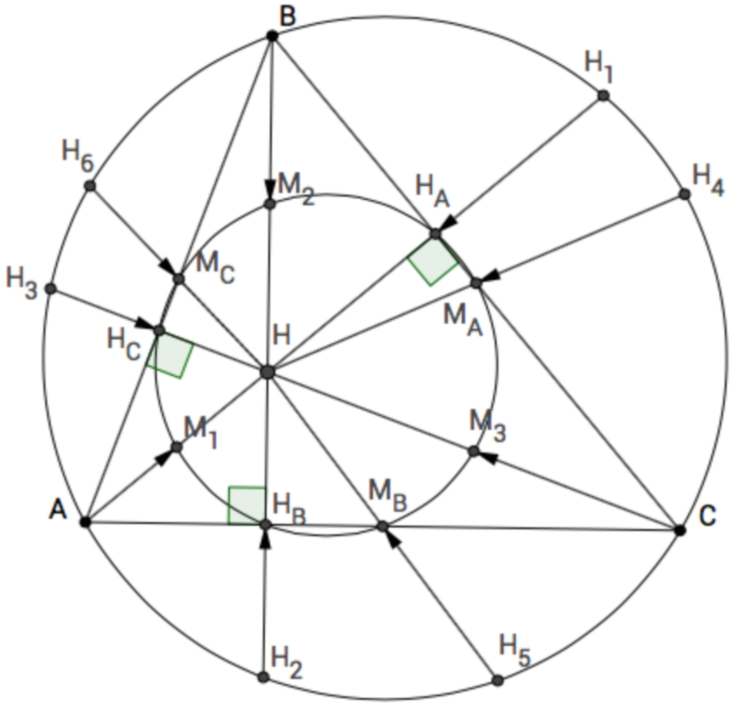
Доказательство.
Пусть прямая OH пересекает отрезок BQ в точке M. Заметим, что треугольники ΔOQM и ΔHBM подобны по двум углам.Тогда, так как по 4 свойству ортоцентра BH = 2OQ, BM : MQ = BH : OQ = 2 : 1. Таким образом, получаем, что точка M лежит на медиане BQ и делит её в отношении 2 :1 , считая от вершины, поэтому точка M является точкой пересечения медиан треугольника ΔABC. Из этого же подобия получаем, что HM : MO = BH : OQ = 2 : 1.

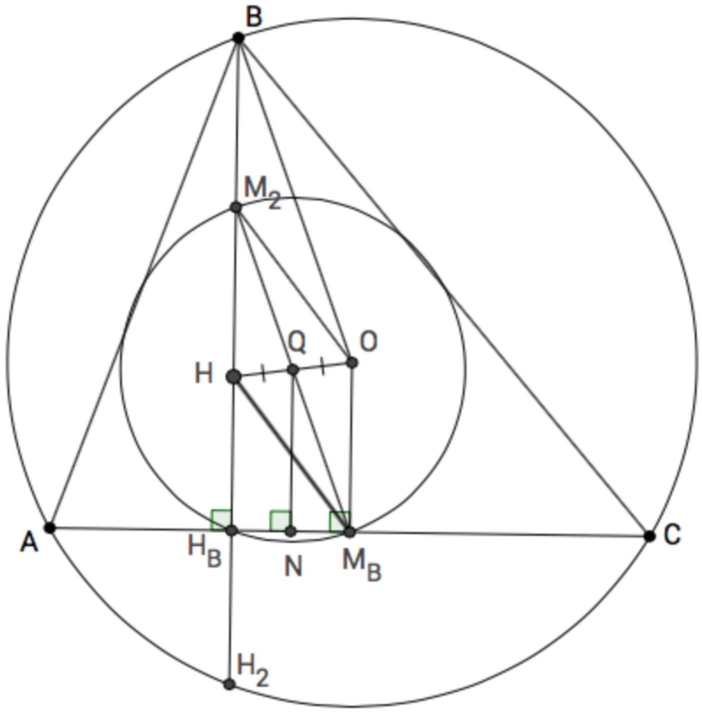


Задача 40.
В любом треугольнике середины сторон, основания высот, и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника лежат на одной окружности - *окружности Эйлера* или *окружности девяти точек*.

Доказательство:
Опишем около ΔABC окружность. Пусть H - ортоцентр. Построим точки симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника(получим H_1, H_2, H_3) и относительно их середин(получим H_4, H_5, H_6). По свойствам 1 и 2 они будут лежать на описанной окружностиΔABC.
Таким образом, на описанной окружности всего девять точек, включая вершины треугольника. Рассмотрим гомотетию с центром в точке H и коэффициентом $^1/_2$, получим, что $H_1 \to H_A$, $H_2 \to H_B$, $H_3 \to H_C$, $H_4 \to M_A$, $H_5 \to M_B$, $H_6 \to M_C$, $A \to M_1$, $B \to M_2$, $C \to M_3$, где H_A, H_B, H_C - основания высот, M_A, M_B, M_C - середины сторонΔABC, а M_1, M_2, M_3, - середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром. Как и любое преобразование подобия,

гомотетия преобразует окружность в окружность, значит, так как точки A, B, C, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 лежат на одной окружности, их образы тоже лежат на одной окружности - окружности Эйлера.





Мы получили, что при гомотетии с центром в точке H и коэффициентом $^1/_2$, описанная окружность ΔABC переходит в окружность Эйлера.

Следствия:
1) *Радиус окружности Эйлера(а значит и окружностей описанных около ортоцентрического и срединного треугольников) равен половине радиуса описанной окружности исходного треугольника.*

2) Пусть O - центр описанной окружности ΔABC, тогда при рассмотренной гомотетии точка O перейдет в центр окружности Эйлера, следовательно, так как H - центр гомотетии, *центр окружности девяти точек лежит на отрезке HO и делит его пополам*.

3) Пусть Q - точка пересечения M_2M_B и OH, а N - проекция Q на AC. По 4 свойству ортоцентра $OM_B = {}^1/_2BH = M_2H$, а $OM_B \parallel M_2H$, следовательно M_2HM_BO - параллелограмм, тогда по свойству Q делит диагональ HO пополам => Q - центр окружности Эйлера.
NQ - средняя линия в трапеции M_BH_BHO => $NQ = {}^1/_2(H_BH + M_BO)$. По 4 свойству ортоцентра $BH = 2OM_B$, а по 1 свойству $HH_2 = 2H_BH$ => $BH_2 = BH + HH_2 = 2(OM_B + H_BH) = 4NQ$, то есть *расстояние от центра окружности Эйлера до стороны треугольника равно $^1/_4$ от длины отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой, симметричной ортоцентру относительно противолежащей стороны.*

4) Лемма. По 3 свойству ортоцентра $\angle ABH_B = \angle CBO$, а $\angle ABH_B = 90° - \angle A$, $\angle CBH_B = 90° - \angle C$ => $\angle H_BBO = \underline{\angle H_2BH_5} = \angle CBH_B - \angle CBO = \angle CBH_B - \angle ABH_B = \underline{\angle A - \angle C}$. $\angle H_2BH_5$ и $\angle H_2OH_5$ - вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну дугу => $\angle H_2OH_5 = 2\angle H_2BH_5 = 2(\angle A - \angle C)$. Как и любое преобразование подобия, гомотетия сохраняет углы между полупрямыми, следовательно $\underline{\angle H_BQM_B} = \angle H_2OH_5 = \underline{2(\angle A - \angle C)}$. Аналогично докажем, что $\angle H_AQM_A = 2(\angle B - \angle C)$ и $\angle H_CQM_C = 2(\angle A - \angle B)$

Теорема Мавло.

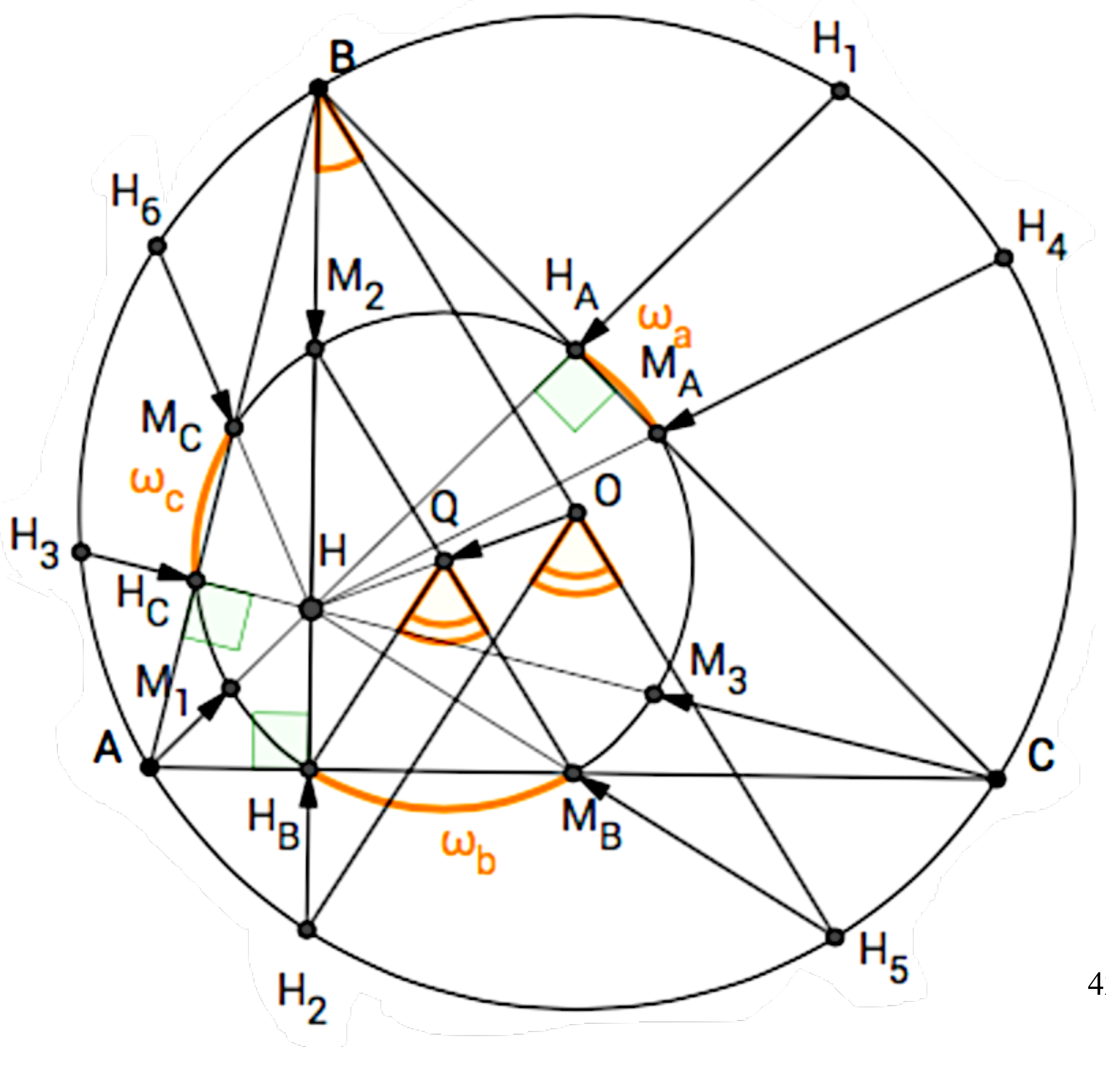
Среди трех дуг, которые отсекают стороны (или их продолжения) произвольного треугольника от его окружности Эйлера, обязательно найдется одна, равная сумме двух других.

Упорядочим углы треугольника в порядке возрастания. Если, к примеру, $\angle C \leq \angle B \leq \angle A$ (или $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$), то $\omega_b = \omega_a + \omega_c$. В случае тупоугольного треугольника дуги могут перекрываться, но равенство все равно остается в силе.

Доказательство:

Поскольку длина дуги есть произведение соответствующего центрального угла на радиус, то в случае $\angle C \leq \angle A \leq \angle B$ достаточно проверить, что $\angle H_BQM_B = \angle H_AQM_A + \angle H_CQM_C$.

Действительно, $\angle H_AQM_A + \angle H_CQM_C = 2\angle B - 2\angle C + 2\angle A - 2\angle B = 2(\angle A - \angle C) = \angle H_BQM_B$, следовательно $\omega_b = \omega_a + \omega_c$.

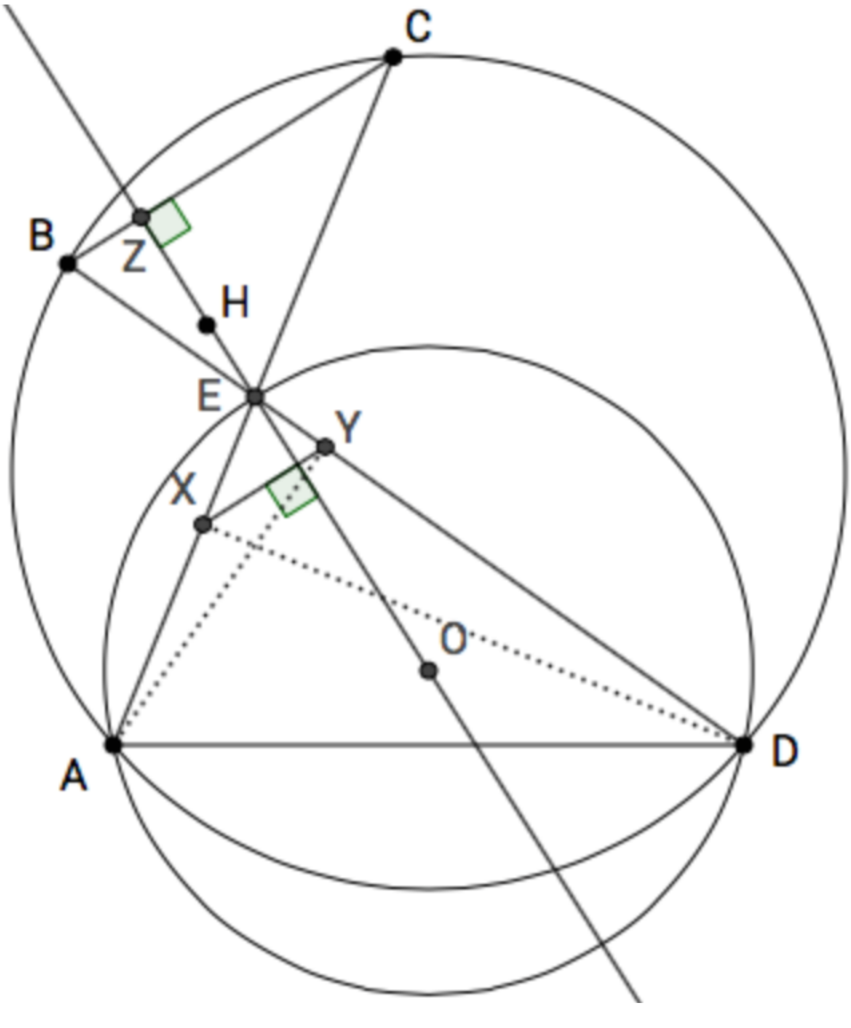


ГЛАВА 6
Авторские задачи

Задача 41. Диагонали вписанного четырёхугольника ABCD пересекаются в точке E.

а) Докажите, что прямая, проходящая через ортоцентр H треугольника BEC и точку пересечения диагоналей, проходит через центр O описанной окружности треугольника AED.

б) Докажите, что верно и обратное (прямая, проходящая через центр O описанной окружности треугольника AED и точку пересечения диагоналей, проходит ортоцентр H треугольника BEC).

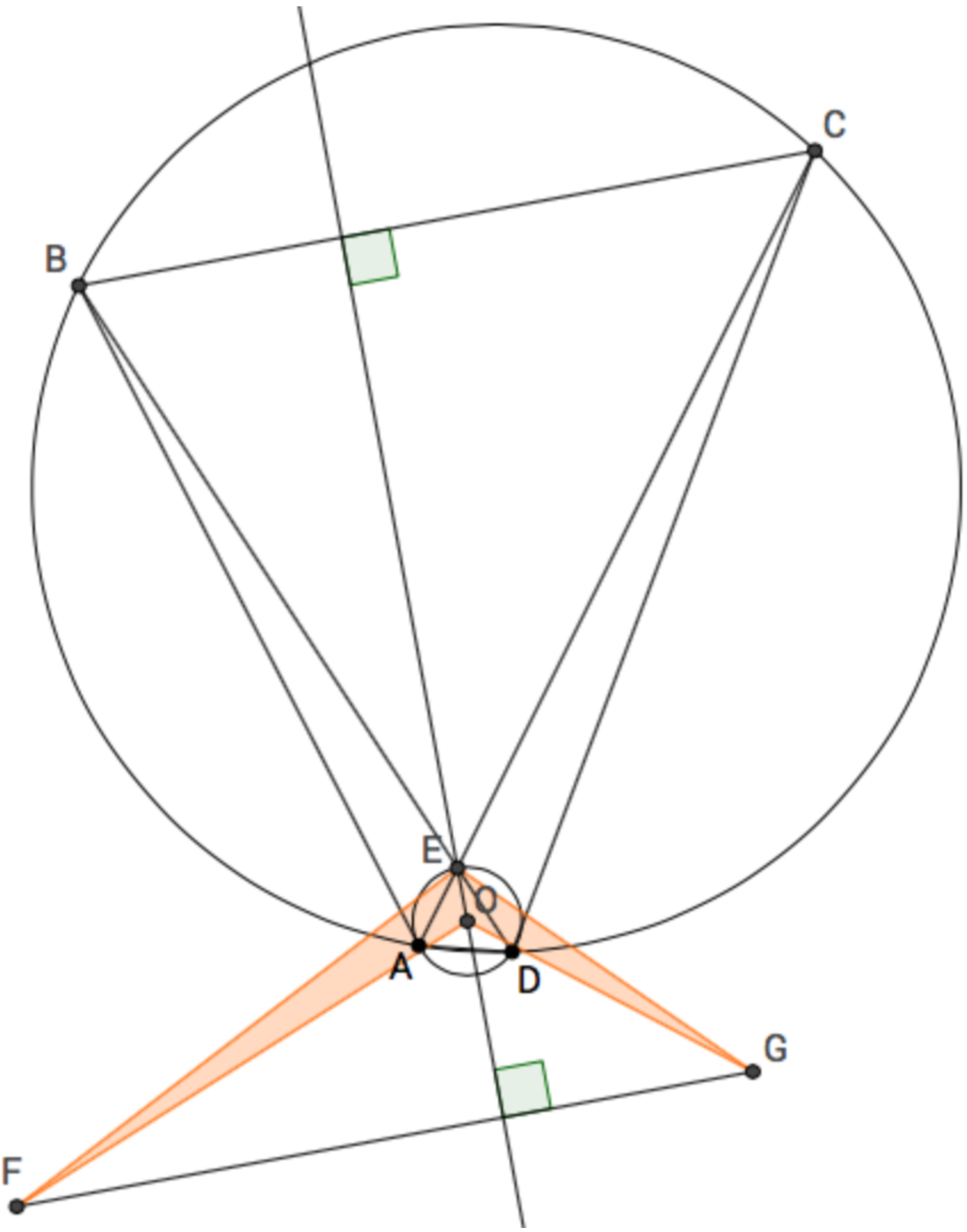


Доказательство.
Пусть эта прямая пересечёт BC в точке Z. Проведём высоты AY и DX в ΔAED. Так как четырёхугольник AXYD - вписанный, ∠CAD = ∠BYX, а углы ∠CAD = ∠DBC как вписанные, опирающиеся на одну дугу, следовательно ∠BYX = ∠DBC, значит XY || BC.
а) А BC ⊥ OZ => XY ⊥ OZ, тогда по 6 свойству ортоцентра центр O лежит на OZ.
б) По 6 свойству ортоцентра XY ⊥ OZ => BC ⊥ OZ => ортоцентр H принадлежит OZ.

Задача 42. Диагонали вписанного четырёхугольника ABCD пересекаются в точке E, причём $AE = 13$, $EC = 120$, $BE = 104$ и $ED = 15$. Сторона $BC = 112$; F и G - ортоцентры треугольников ABD, ACD; O - центр описанной окружности треугольника AED. Найдите площадь четырёхугольника FEGO.

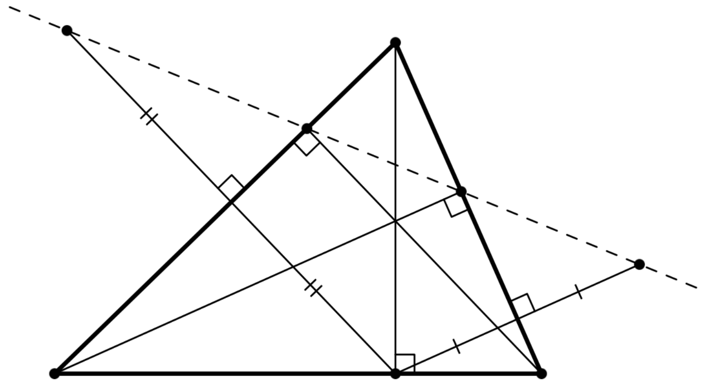
Решение.

Заметим, что прямая $OE \perp BC$ (см. задачу 41), а (по задаче 34) $FG \parallel BC$ (и $FG = BC$), следовательно $FG \perp OE$, то есть диагонали четырёхугольника FEGO перпендикулярны, значит $S_{FEGO} = {}^1/_2\, FG \cdot OE \cdot \sin(90°) = {}^1/_2\, FG \cdot OE = {}^1/_2\, BC \cdot R$, где R - радиус описанной окружности ΔAED. Пусть a, b и c стороны ΔAED, тогда $R = abc / 4(p(p - a)(p - b)(p - c))^{1/2} = 13 \cdot 14 \cdot 15 / 4 \cdot \mathbf{(21 \cdot (21 - 13)(21 - 14)(21 - 15))^{1/2}} = 65/8$. Таким образом, $S_{FEGO} = {}^1/_2\, BC \cdot R = 112 \cdot 65 / 16 = 7 \cdot 65 = 455$.

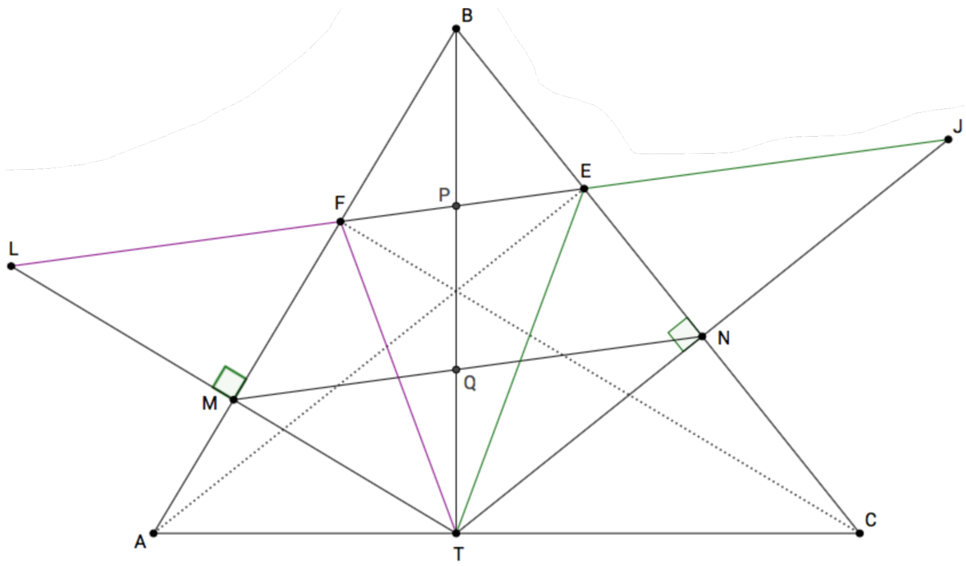


Задача 43. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CF. Известно, что сумма FT и ET составляет $^2/_3$ от полупериметра ортотреугольника. В каком отношении FE делит высоту BT?

Решение.
Пусть L и J - точки, симметричные T относительно AB и BC. В силу симметрии ∠TEC = ∠JEC, а, так как четырёхугольники ABET и AEFC - вписанные, ∠TEC = ∠BAC = ∠BEF, следовательно ∠JEC = ∠BEF => точка J лежит на луче FE. Аналогично докажем, что L лежи на луче EF. Таким образом, точки *L, F, E и J лежат на одной прямой.*

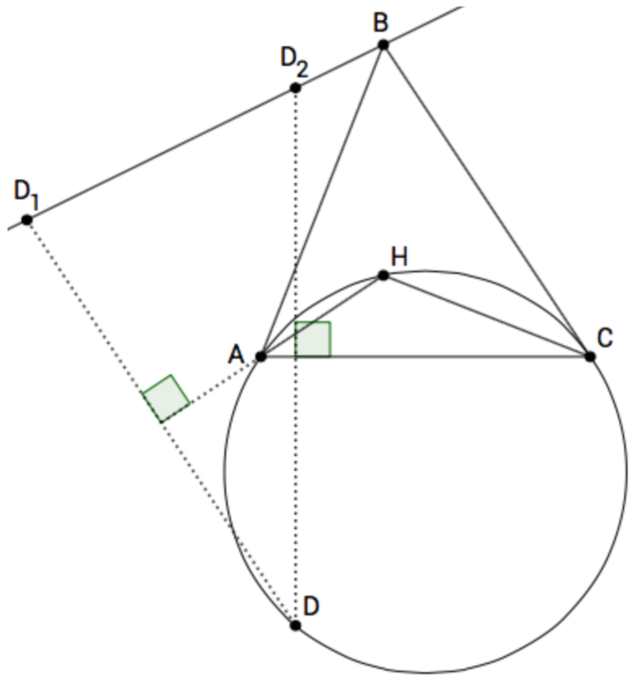


Тогда отрезок MN, соединяющий середины сторон TL и TJ является средней линией в ΔLTJ, а значит по теореме Фалеса делит отрезок TP пополам (P = BT ∩ FE) => PQ = QT
(Q = BT ∩ MN).
В силу симметрии FT = FL и ET = EJ, следовательно LJ = FL + FE + EJ = FT + FE + ET = 2p, где p - полупериметр ортотреугольника, тогда, так как по условию FT + ET = $^3/_2 \cdot$ p, FE = LJ - (FL + EJ) = LJ - (FT + ET) = 2p - $^3/_2 \cdot$ p = $^1/_2$ p. Раз MN - средняя линия, MN = $^1/_2$ LJ = p. Следовательно, так как FE = $^1/_2$ p = $^1/_2$ MN и FE || MN, FE - средняя линия в ΔMBN, тогда по теореме Фалеса BQ делится FE полам => BP = PQ, а PQ = QT, значит BP = PQ = QT => FE делит высоту BT в отношении 1 : 2.



Задача 44. H - ортоцентр в треугольнике ABC. На описанной окружности треугольника AHC взята произвольная точка D. Докажите, что вершина B лежит на прямой D_1D_2, где D_1 и D_2 - точки симметричные D относительно сторон AH и AC соответственно.

Доказательство.
Заметим, что *если в четвёрке точек A, B, C, H точка H является точкой пересечения высот треугольника ABC, то и любая из четырёх точек является ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными точками*. Значит D_1D_2, прямая Штейнера, проходит через ортоцентр B треугольника $\triangle AHC$ (см. задачу 38).

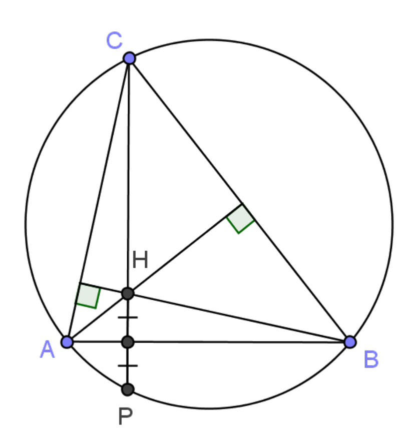


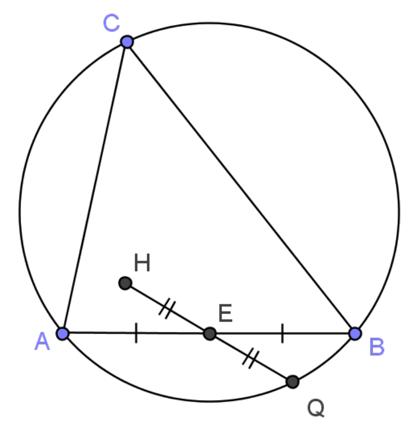
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

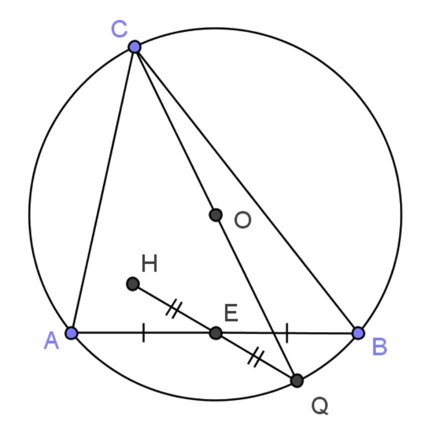
В реферате рассмотрены основные свойства и формулы, связанные с ортоцентром треугольника, систематизированы задачи по их применению.
В работе представлены решения 33 задачи и доказательства 18 теорем и свойств. Тексты задач взяты из различных источников: книги Г.М. Коксетера, А. И.Кушнира, Я. П. Понарина и др.
Самостоятельно решено 36 задач.
В главе 6 представлены тексты и решения авторских задач.

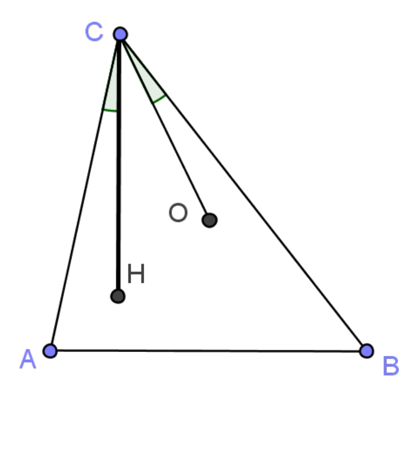
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

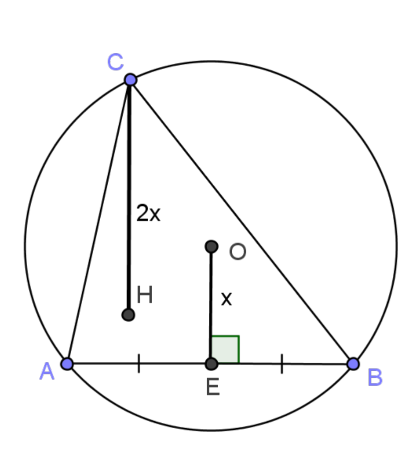
1. А. Карлюченко и Г. Филипповский, «О касательных, проведённых в двух вершинах треугольника»
2. А. Г. Мякишев, «Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тейлора»
3. А. В. Акопян, «Геометрия в картинках»
4. F. Smarandache, «An Important Application of the Computation of the Distances between Remarkable Points in the Triangle Geometry»
5. А.И. Кушнир, «Векторные методы решения задач»
6. А. И.Кушнир, «Альтернативные способы решения»
7. Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия. Том 1»
8. Журнал «Квант»
9. С.Грейтцер, Г.М. Коксетер, «Новые встречи с геометрией»
10. В. Швецов, «От прямой Эйлера до теоремы Дроз-Фарни»
11. А. А. Заславский, «Олимпиады имени Шарыгина И.Ф.»
12. Статья с официального сайта УрФУ : http://lyceum.urfu.ru/study/mat/1nvc7h10.pdf
13. Инфармационно- поисковая система «Задачи по геометрии»: http://zadachi.mccme.ru/

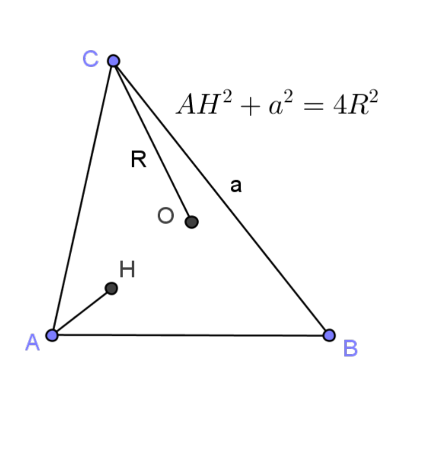

C
H
A
B
P

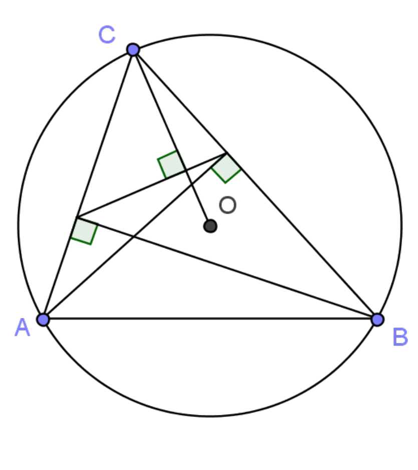

C
H
E
A
B
Q

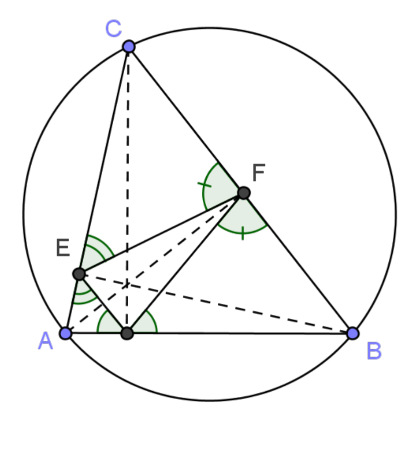

C
O
H
E
A
B
Q

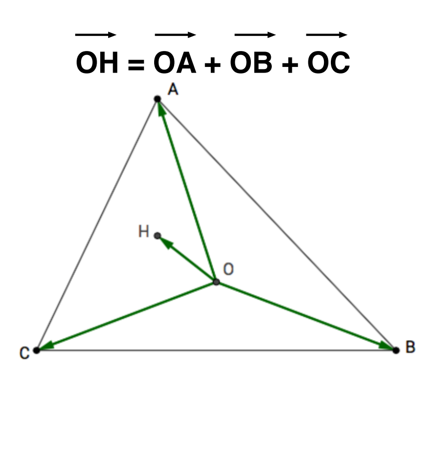

C
O
H
A
B

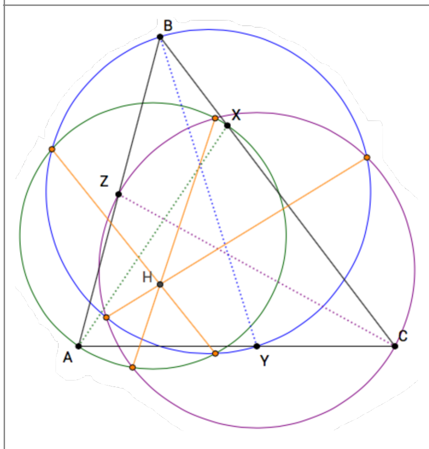

C
2x
O
x
H
A
E
B

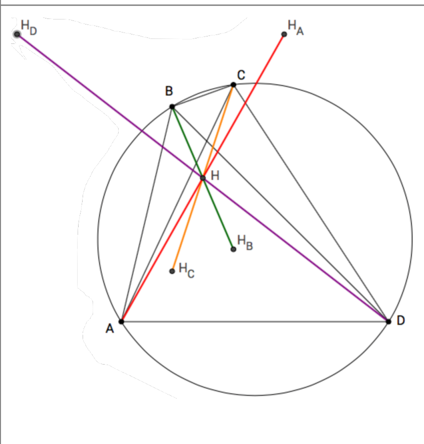

C
$AH^2 + a^2 = 4R^2$
R
a
O
H
A
B

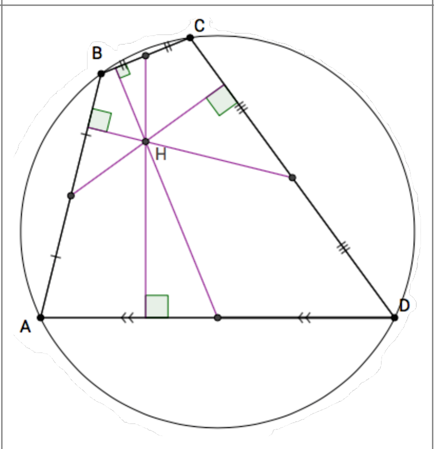

C
O
A
B

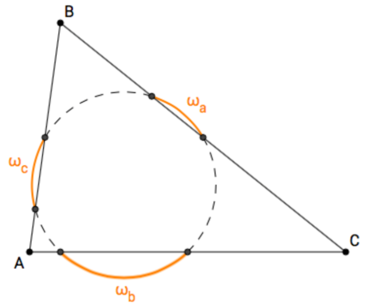

C
F
E
A
B


$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
A
H
O
C
B

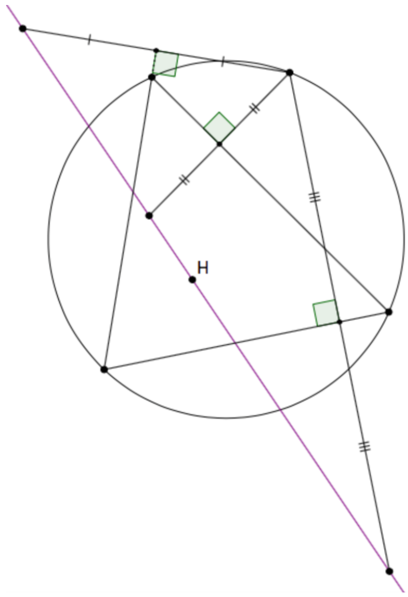

B
X
Z
H
A
Y
C

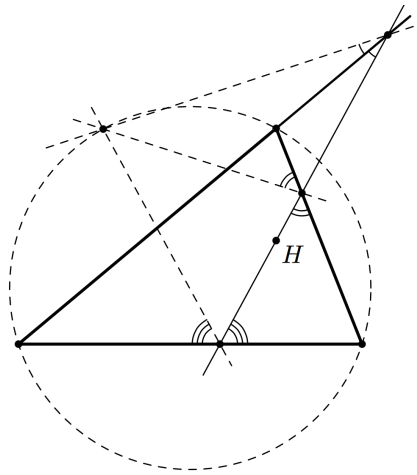

H_D
H_A
B
C
H
H_B
H_C
A
D

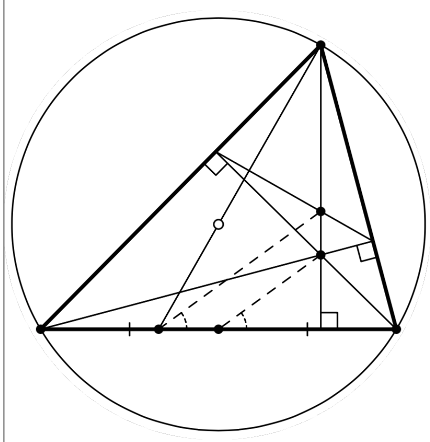

C
B
H
A
D

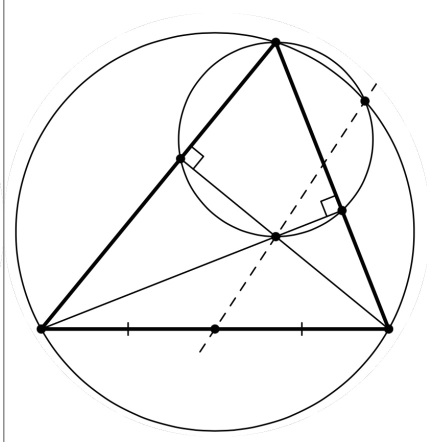


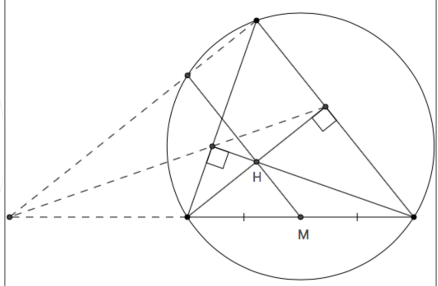
$$\omega_b = \omega_a + \omega_c$$

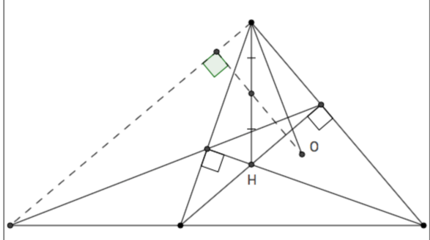


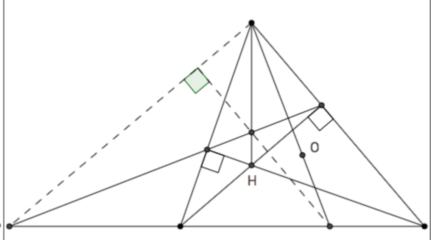


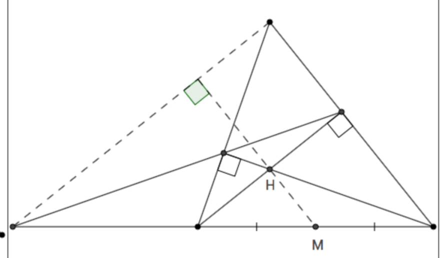


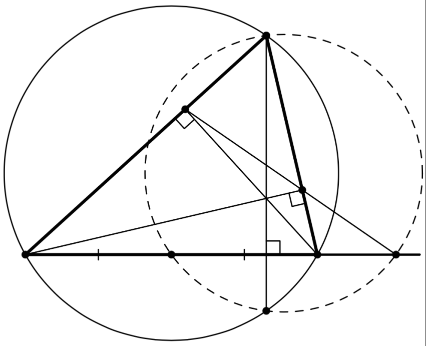


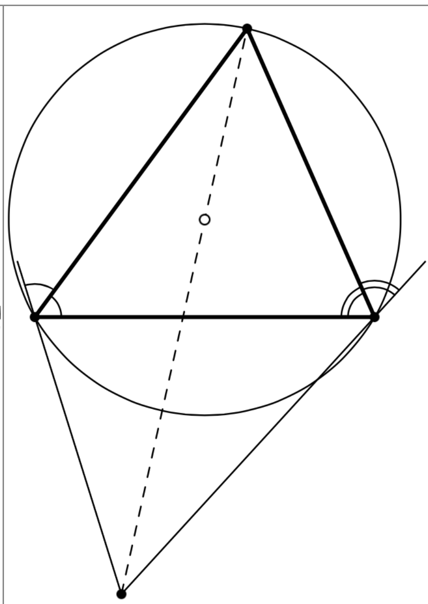


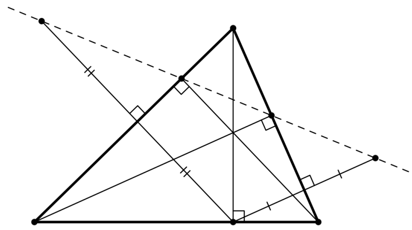


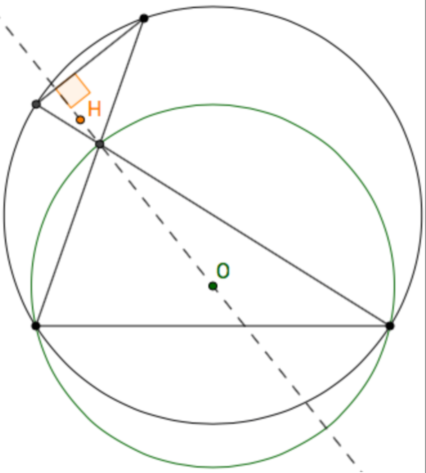











H
O