Реферат
По курсу геометрии
Тема «От педального треугольника до точки Тебо»

Выполнила ученица 10 А класса
ГБОУ Физматшколы № 2007
Шипилова Ксения Максимовна
Учитель геометрии и руководитель
Ховрина Вера Владимировна

Москва 2015

Содержание:

Глава 1. Педальный треугольник……………………………………………………..3

1.1.Теория………………………………………………………………………………….3

1.2.Задачи…………………………………………………………………………………..4

Глава 2.Прямая Симсона и ее свойства……………………………………..13

2.1.Теория………………………………………………………….……………………13

2.2.Задачи ……………………………………………………………………….........15

2.3. Теорема Птолемея через прямую Симсона…......................35

Глава 3. Точка Тебо…………………………………………………………………..37

Глава 4. Авторские задачи……………….……………………………………..46

Заключение……………………………………………………………………………….55

Список использованной литературы…………………………………….…..56

Введение.

В работе рассмотрена одна из интересных конструкций, связанных с треугольником - педальный треугольник, а также его вырожденный случай, называемый прямой Симсона.

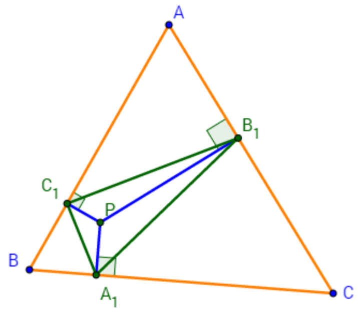
В первой главе приведены доказательства свойств педального треугольника, а также педального n – угольника, и их применение при решении задач.

Во второй главе рассмотрен случай вырожденного педального треугольника, известного под названием прямой Симсона – Уоллеса. Также в ней доказываются свойства этой прямой и рассматриваются наиболее интересные задачи, связанные с ней.

В третьей главе приводится альтернативное доказательство теоремы о прямой Симсона, вводится понятие точки Тебо и показывается связь этой точки с прямыми Симсона.

Педальный треугольник

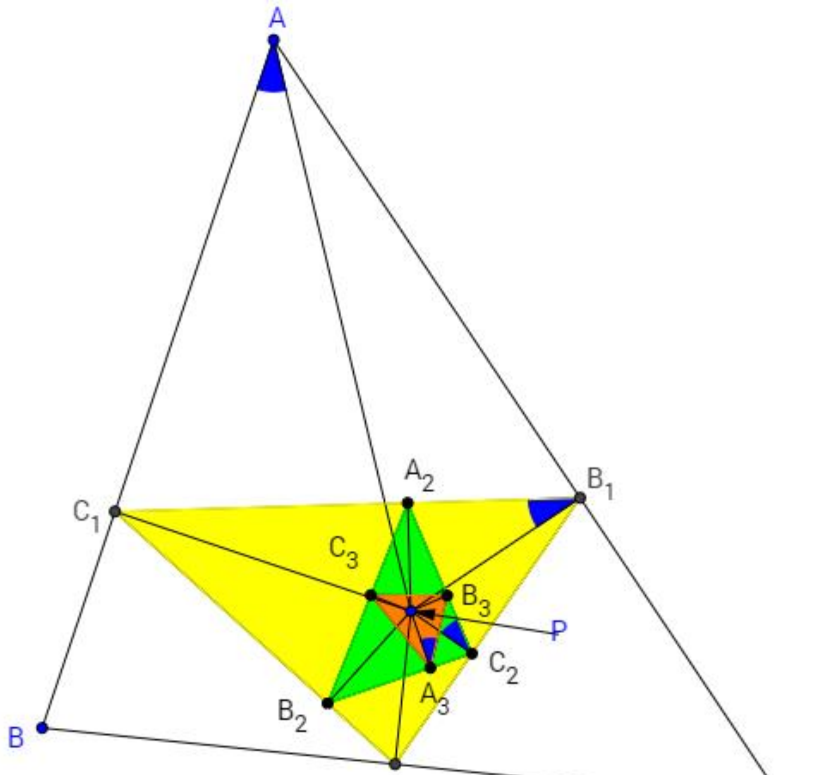
Пусть P – любая точка внутри данного треугольника ABC, и пусть перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны BC, CA, AB треугольника будут PA_1, PB_1, PC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, называется **педальным треугольником** треугольника ABC для **педальной точки P**.



Ясно, что если точка P – ортоцентр, то образуется ортотреугольник, а если она – центр описанной окружности, то образуется серединный треугольник.

Теорема: **Третий педальный треугольник подобен исходному.**

Доказательство:

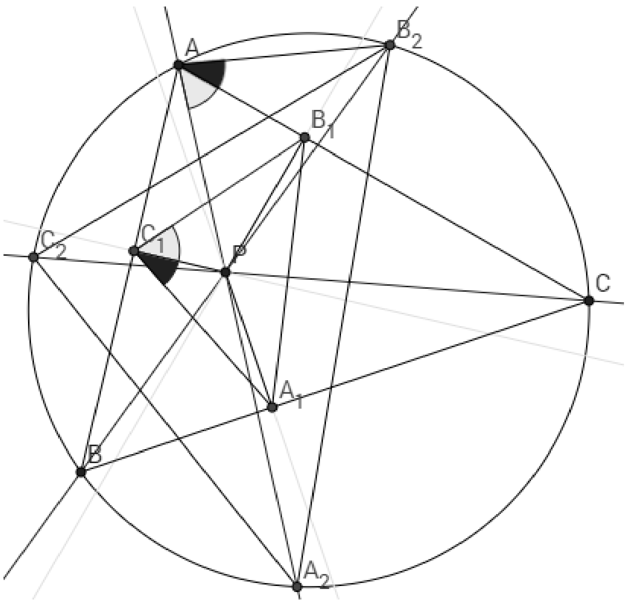


Точка P принадлежит каждой из описанных окружностей треугольников AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ и $A_3B_2C_3$. Следовательно, $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$, а также $\angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 = \angle PC_1A_2 = \angle PB_2A_2 = \angle PB_2C_3 = \angle PA_3C_3$.

Более того, эту теорему можно обобщить, сказав, что **n – й педальный n – угольник любого n – угольника подобен первоначальному n – угольнику.**

Задача 1: **Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2; $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Докажите, что $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.**

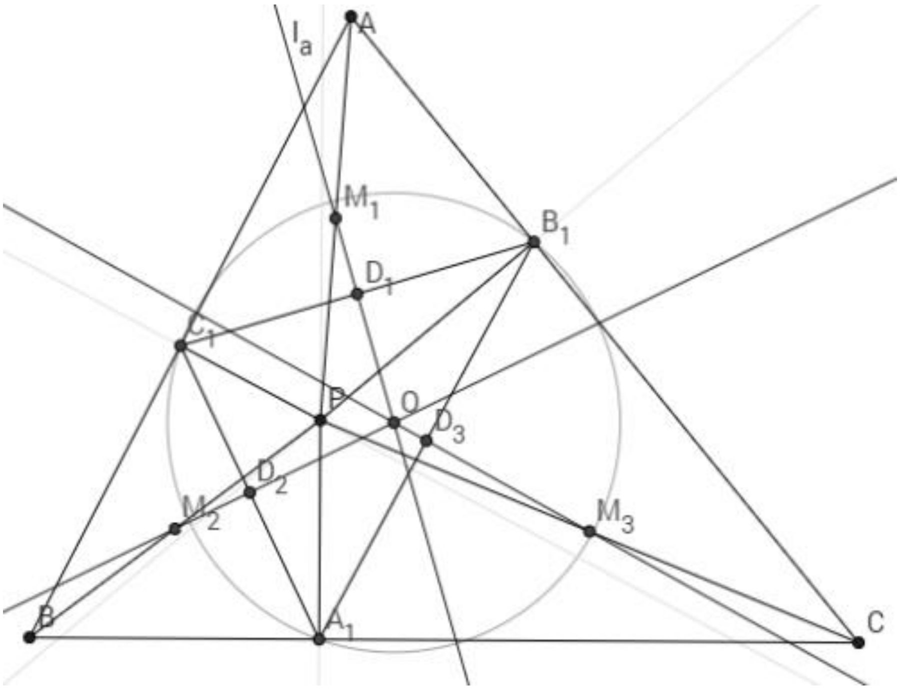
Доказательство:



Точки A, B_1, P и C_1 лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle B_1C_1P = \angle B_1AP = \angle CAA_2$. Точки B, C_1, P и A_1 также лежат на одной окружности. Значит, $\angle A_1C_1P = \angle A_1BP = \angle CBB_2$. Так как точки A_2, C_2, A и C лежат на одной окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle CC_2A_2 = \angle CAA_2$. Аналогично, точки B_2, C_2, B и C лежат на одной окружности, описанной около треугольника ABC, откуда следует, что $\angle CC_2B_2 = \angle CBB_2$. Тогда $\boldsymbol{\angle A_2C_2B_2 = \angle CC_2A_2 + \angle CC_2B_2 = \angle CAA_2 + \angle CBB_2 = \angle A_1C_1B_1}$. Аналогично, $\boldsymbol{\angle C_2B_2A_2 = \angle C_1B_1A_1}$. Значит, треугольники $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ подобны по двум углам.

Задача 2: **Из точки P опущены перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны треугольника ABC. Прямая l_a соединяет середины отрезков PA и B_1C_1. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.**

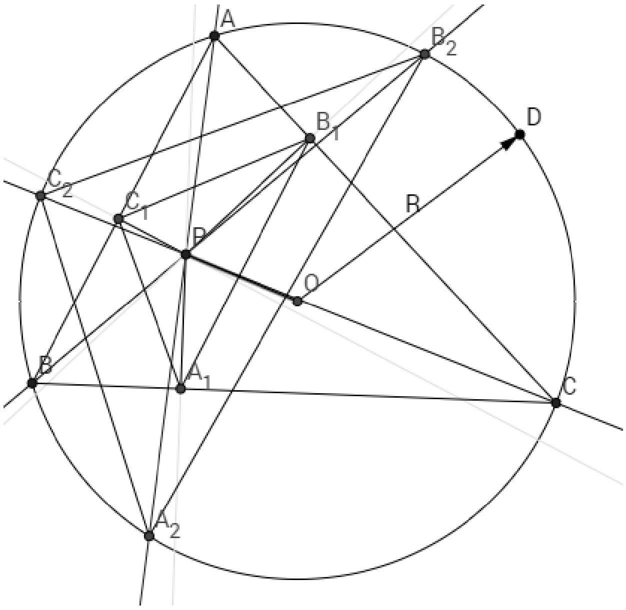
Доказательство:



Точки B_1 и C_1 лежат на одной окружности с диаметром AP. Значит, середина отрезка AP является\ центром окружности, описанной около $\Delta\ AB_1C_1$. Следовательно, l_a – серединный перпендикуляр к отрезку B_1C_1. Поэтому прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

Задача 3: **Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R с центром O. Докажите, что площадь педального треугольника точки P относительно треугольника ABC равна $|R^2 – OP^2|S_{ABC} / 4R^2$.**

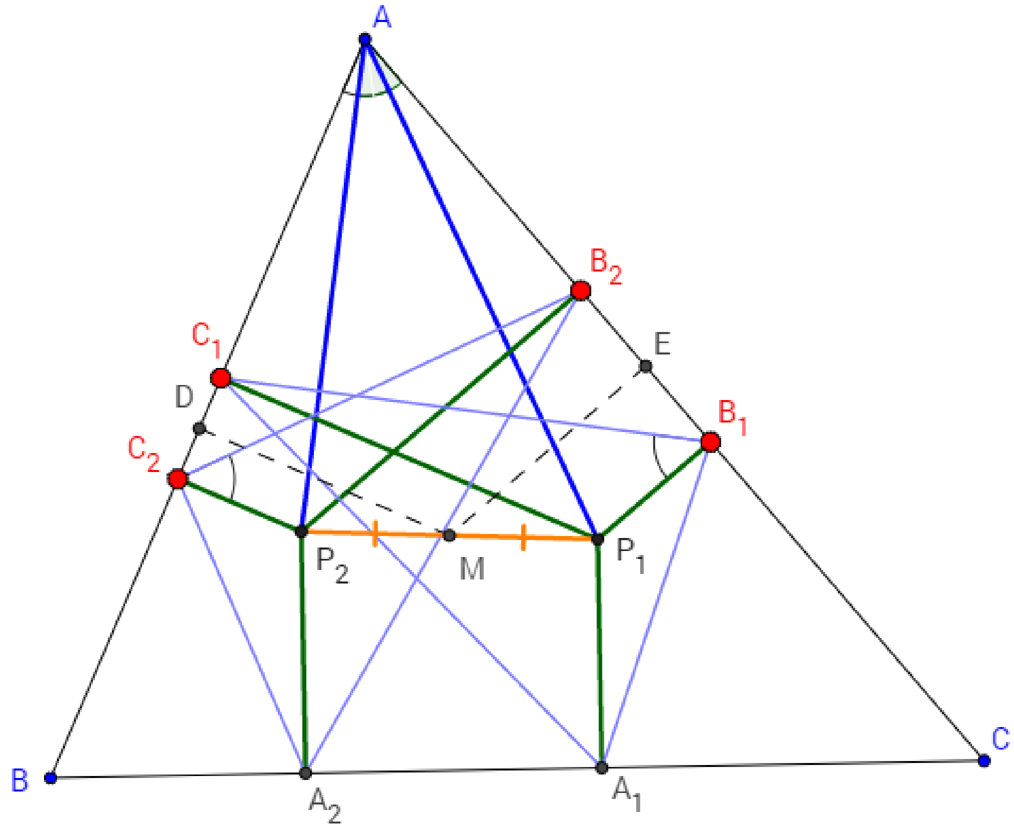
Доказательство:



Пусть A_1, B_1, C_1 - основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые, содержащие стороны треугольника; A_2, B_2, C_2 – точки пересечения прямых PA, PB, PC с описанной окружностью треугольника ABC; S, S_1, S_2 – площади треугольников ABC, С $A_1B_1C_1$, С $A_2B_2C_2$. По свойству педального треугольника: $a_1 = a * AP / 2R$; а по теореме синусов: $a_2 = a * B_2P / CP$, следовательно, $\mathbf{a_2 / a = B_2P / CP}$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны (задача 1). Следовательно, $\mathbf{S_1 / S_2 = (a_1 / a_2)^2 = (AP * CP / (2R * B_2P))^2}$. Так как $\mathbf{B_2P * BP = |OP^2 – R^2|}$, то $\mathbf{S_1 / S_2 = (AP * BP * CP)^2 / 4R^2(OP^2 – R^2)^2}$. Используя формулы $S = abc / 4R$; $S_2 = a_2b_2c_2 / 4R$, получим: $\mathbf{S_2 / S = a_2b_2c_2 / abc}$. Заметим, что $a_2 / a = |OP^2\ P\ R^2| / (BP * CP)$, аналогично находим b_2 / b / c_2 / c. Тогда $\mathbf{S_2 / S = |OP^2 – R^2|^3 / (AP * BP * CP)^2}$ и $S_1 / S = (S_1 / S_2) / (S_2 / S) = |OP^2 / R^2| / 4R^2$.

Задача 4: **Точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что их педальные окружности совпадают, причем центром этой окружности является середина отрезка P_1P_2.**

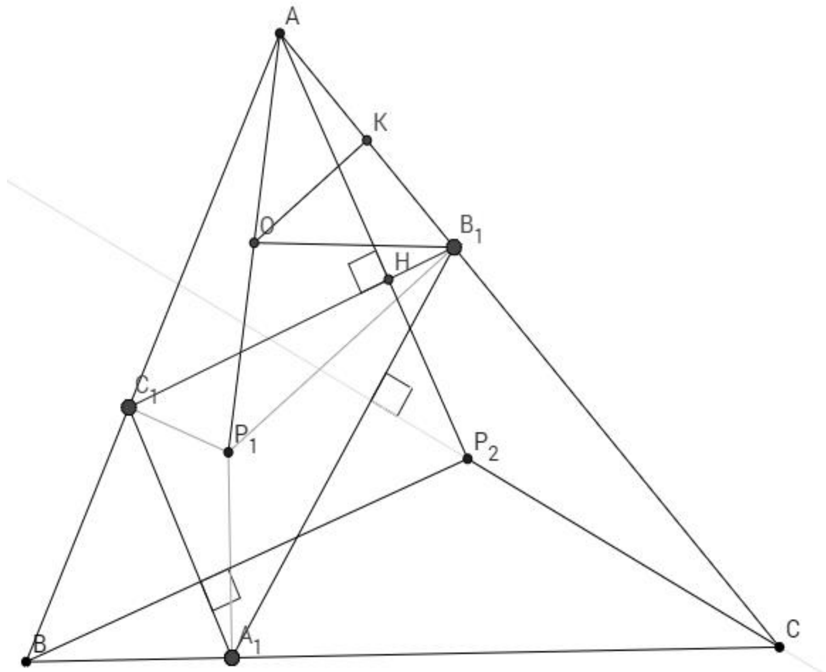
Доказательство:



Опустим из точек P_1 и P_2 перпендикуляры P_1B_1 и P_2B_2 на AC и перпендикуляры P_1C_1 и P_2C_2 на AB. Точки P_1, B_1, A, C_1 лежат на одной окружности, значит, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1$. Точки P_2, B_2, A, C_2 также лежат на одной окружности, следовательно, $\angle P_2B_2C_2 = \angle P_2AC_2$. Так как точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены, то $\angle P_1AC_1 = \angle P_2AC_2$, следовательно, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_2B_2C_2$. А так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$, то $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$ и $\angle C_2C_1B_1 = \angle C_2B_2B_1$, следовательно, делаем вывод, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности, центр которой, соответственно, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2. Заметим, что по теореме Фалеса оба эти перпендикуляра проходят через середину отрезка P_1P_2 – точку M. Тогда, точки B_1 и C_1 равноудалены от точки M, и точки B_2 и C_2 равноудалены от точки M. Аналогично можно доказать, что точки A_1 и B_1 также равноудалены от точки M, и точки A_2 и B_2 равноудалены от точки M. Следовательно, получили, что точка M – центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и центр описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$.

Задача 5: **Точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что стороны педального треугольника точки P_1 перпендикулярны прямым, соединяющим точку P_2 с вершинами треугольника ABC.**

Доказательство:



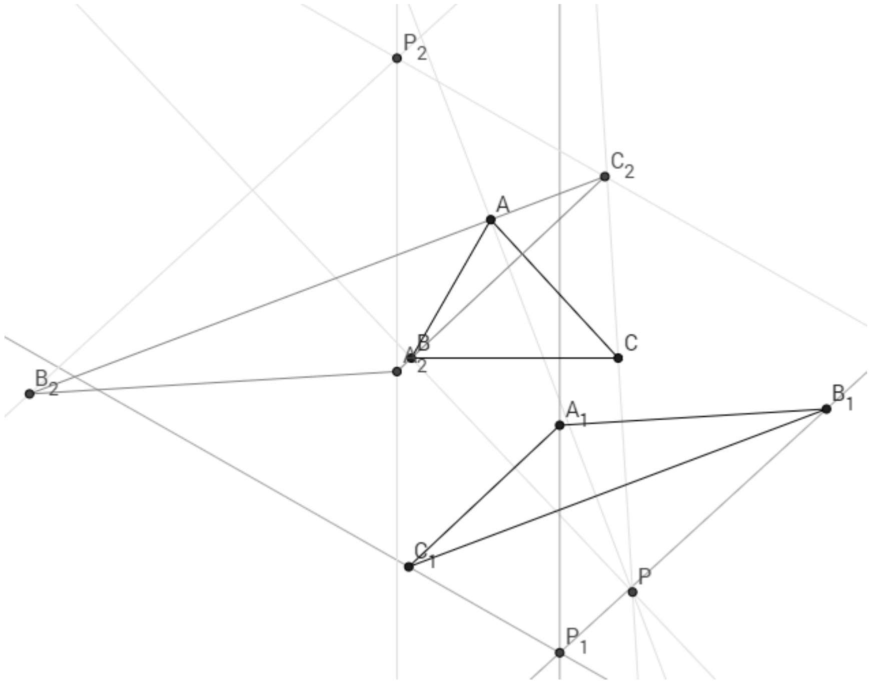
Пусть B_1 и C_1 – проекции точки P_1 на стороны AC и AB треугольника ABC. Отрезок AP является диаметром окружности, описанной около треугольника AB_1C. Пусть O – центр этой окружности (то есть середина отрезка AP_1), K – середина отрезка AB_1, H – точка пересечения прямых AP_2 и B_1C_1. $\angle$ KOA = $\angle$ B_1OA / 2, так как треугольник AOB_1 – равнобедренный. $\angle$ HC_1A = $\angle$ B_1OA / 2, так как $\angle$ HC_1A – вписанный, а $\angle$ B_1OA – центральный. Следовательно, **$\angle$ KOA = $\angle$ HC_1A**. Так как по условию P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC, то $\angle$ C_1AP_1 = $\angle$ B_1AP_2, откуда следует, что $\angle$ KAO = $\angle$ HAC_1. Тогда в треугольниках Δ C_1AH и Δ OAK: **$\angle$ C_1HA = $\angle$ OKA = 90°**. Аналогично доказывается, что остальные стороны треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярны прямым, соединяющим точку P_2 с вершинами треугольника ABC.

Эту задачу можно доказать и другим способом:

$\angle$ $C_1B_1P_1$ = $\angle$ C_1AP_1 = BAH, следовательно, $AP_2 \perp B_1C_1$.

Теорема: **Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB тоже пересекаются в одной точке (Штейнер).**

Доказательство:



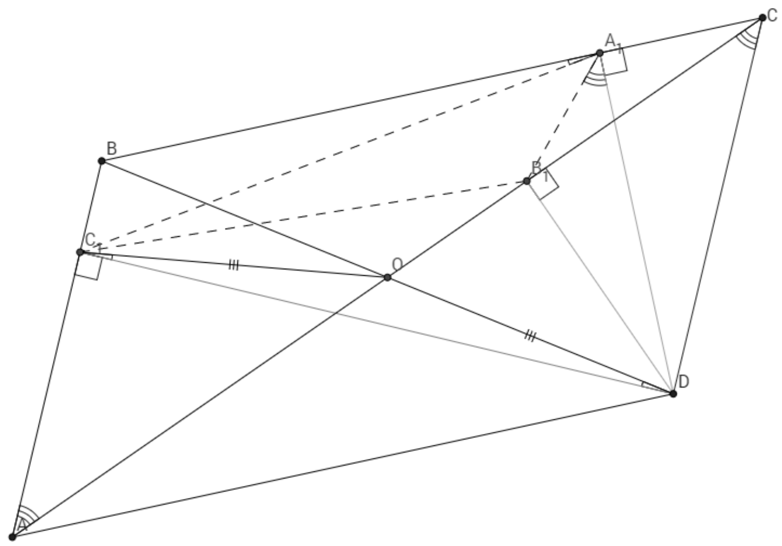
Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 пересекаются в точке P. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. В результате получим треугольник $A_2B_2C_2$. Пусть точка P_2 – точка, изогонально сопряженная точке P относительно треугольника $A_2B_2C_2$. По задаче 4: прямые, соединяющие вершины треугольника $A_2B_2C_2$ с точкой P_2, перпендикулярны сторонам Δ ABC. Треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$, тогда пусть P_1 – образ точки P_2 при соответствующей гомотетии. Тогда получим, что прямые, соединяющие вершины Δ $A_1B_1C_1$ с точкой P_1, перпендикулярны сторонам Δ ABC, то есть P_1 – искомая точка.

Замечание (*):

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, для которых выполняется условие теоремы 2, называют <u>ОРТОЛОГИЧЕСКИМИ</u>.

Задача 6: **Дан параллелограмм ABCD. Докажите, что педальная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через точку пересечения его диагоналей.**

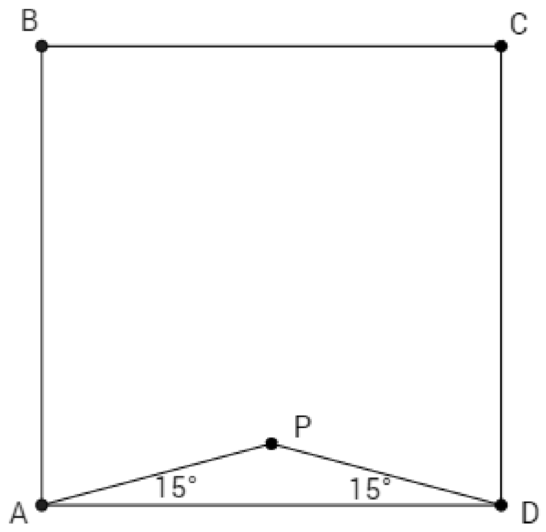
Доказательство:

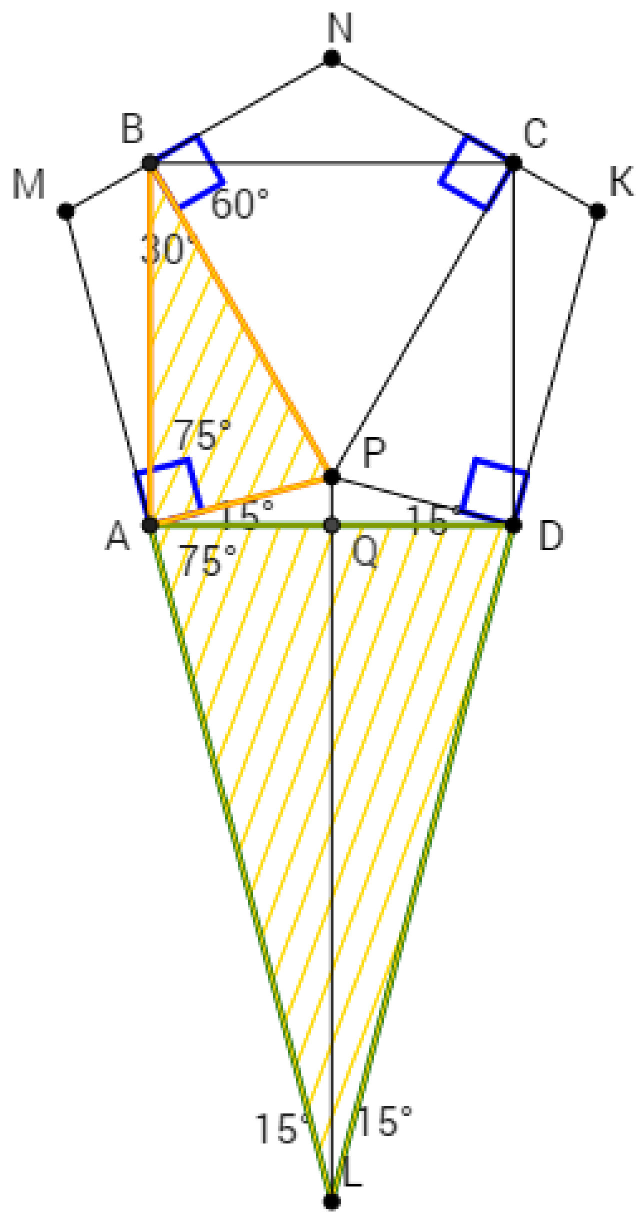


Пусть A_1, B_1, C_1 – основания перпендикуляров, опущенных на стороны Δ ABC: BC, AC, AB, точка пересечения диагоналей параллелограмма – O. Точки A_1, C, D, B_1 лежат на одной окружности, следовательно, **∠ B_1A_1D = ∠ B_1CD**. Прямые AB и CD параллельны, значит, **∠ B_1CD = ∠ C_1AO => ∠ B_1A_1D = ∠ C_1AO**. Точки B, A_1, D, C_1 лежат на одной окружности, откуда **∠ BA_1C_1 = ∠ BDC_1.** Так как **∠ BC_1D = 90°**, то C_1O = OD и **∠ OC_1D = ∠ BDC_1**, значит **∠ BA_1C_1 = ∠ OC_1D**. Из развернутого угла BAC: **∠ $C_1A_1B_1$ = 180° - ∠ BA_1C_1 - ∠ B_1A_1D – 90° = 180° - ∠ OC_1D - ∠ C_1AO – 90° = ∠ C_1OA**. Получили, что по признаку четырехугольник $C_1A_1B_1O$ – вписанный, т.е. точка O принадлежит описанной окружности Δ $A_1B_1C_1$, что, в свою очередь, означает, что педальная окружность точки D относительно Δ ABC проходит через точку O, т.е. точку пересечения диагоналей данного параллелограмма ABCD.

Задача 7: **Если внутри квадрата ABCD построен равнобедренный треугольник PAB с углами по 15° при основании AB, как на рисунке, то точки P, C, D являются вершинами равностороннего треугольника. Требуется доказать это.**

Доказательство:


B
C
P
15°
15°
A
D

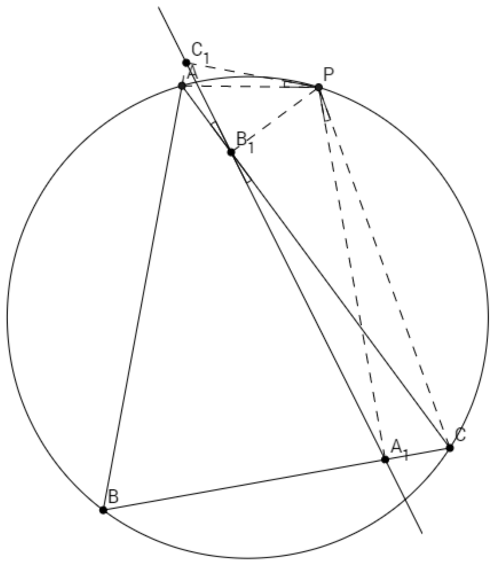

N
B
C
M
K
60°
30°
75°
P
15°
15°
A
Q
D
75°
15°
15°
L

Соединим точку P с вершинами квадрата ABCD. Тогда у нас образуются отрезки AP, BP, CP, DP. Проведем 4 прямые: a, перпендикулярно AP; b, перпендикулярно BP; c, перпендикулярно CP; d, перпендикулярно DP. Пусть M – точка пересечения a и b, N – точка пересечения b и c, K – точка пересечения c и d, L – точка пересечения d и a. Заметим, что мы получили педальный четырехугольник MNKL для нашего квадрата ABCD. Опустим перпендикуляр PQ из точки P на AD. Если AB = a, то AQ = a/2. В треугольнике APQ: Cos 15° = AP / AQ, тогда **AP / AB = 1 / 2Cos 15°**. В треугольнике AQL: tg 15° = AQ / QL = a / 2QL, тогда **QL = a / (4 – 2*3$^{0.5}$)**, Cos 15° = QL / AL, следовательно, **AL = QL / Cos 15° = a / (4 – 2*3$^{0.5}$)Cos 15°. AD / AL** = a / (a / (4 – 2*3$^{0.5}$)Cos 15°) = **(4 – 2*3$^{0.5}$)Cos 15°.** (Докажем, что **1 / 2Cos 15° = (4 – 2*3$^{0.5}$)Cos 15°**: Данное ⇔ 1 = (8 – 4*3$^{0.5}$)Cos 15°, Cos^{2} 15° = 1 – ((6$^{0.5}$ – 2$^{0.5}$) / 4)^{2} = … = (2 + 3$^{0.5}$) / 4, следовательно, **(8 – 4*3$^{0.5}$)Cos 15°** = (8 – 4*3$^{0.5}$)(2 + 3$^{0.5}$) / 4 = 4(2 – 3$^{0.5}$)(2 + 3$^{0.5}$) / 4 = 4 – 3 = **1).** Тогда Δ ADL ~ Δ APB по двум сторонам и углу между ними(∠ BAP = ∠ LAD = 75°). Из подобия следует, что ∠ APB = ∠ ALD = 30°, значит, **∠ PBC = 60°.** Аналогично доказывается, что Δ PCD ~ Δ LAD, из этого подобия также следует, что ∠ PCD = ∠ ALD = 30°, т.е. **∠ PCB = 60°.** Тогда в треугольнике BCP по теореме о сумме углов треугольника: **∠ BPC** = 180° - 60° - 60° = **60°**, т.е. по определению треугольник с вершинами в точках P, C и D является равносторонним.

Прямая Симсона

Мы уже говорили о том, что если из точки P опущены перпендикуляры на стороны треугольника ABC, то основания этих перпендикуляров, как правило, образуют вершины треугольника $A_1B_1C_1$ (этот треугольник называется педальным).

Но теперь рассмотрим особый случай, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.



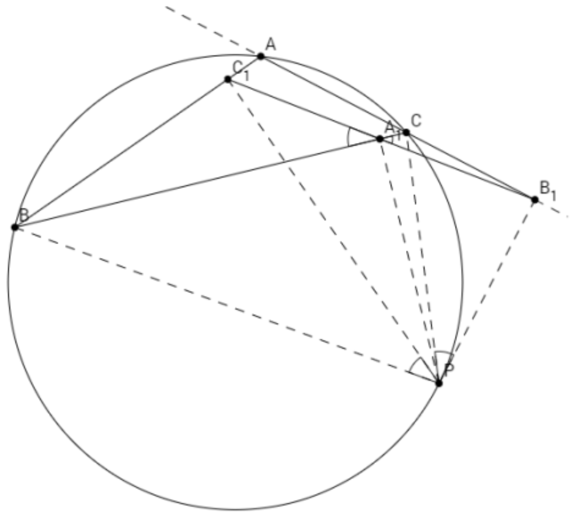
Для определенности будем считать, что точка P находится на дуге CA, не содержащей точку B.

Т.к. углы A_1, B_1, C_1 – прямые, то точка P также лежит на окружностях, описанных около треугольников ΔA_1BC_1, ΔA_1B_1C и ΔAB_1C_1. Поэтому: **$\angle APC = 180° - \angle B = \angle C_1PA_1$**. Вычитая $\angle APA_1$, мы получим, что: **$\angle A_1PC = \angle C_1PA$**. Так как точки A_1, C, P, B_1 лежат на одной окружности, то **$\angle A_1PC = \angle A_1B_1C$**. Точки A, B_1, P, C_1 лежат на одной окружности, следовательно, **$\angle C_1PA = \angle C_1B_1A$**. Таким образом, **$\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$**. Отсюда следует, что точки **A_1, B_1, C_1 – коллинеарны**, т.е. педальный треугольник «вырождается» в прямую, которую называют прямой Симсона.

Таким образом, мы доказали следующую теорему: **Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, коллинеарны тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.** Теперь ответим на несколько вопросов:

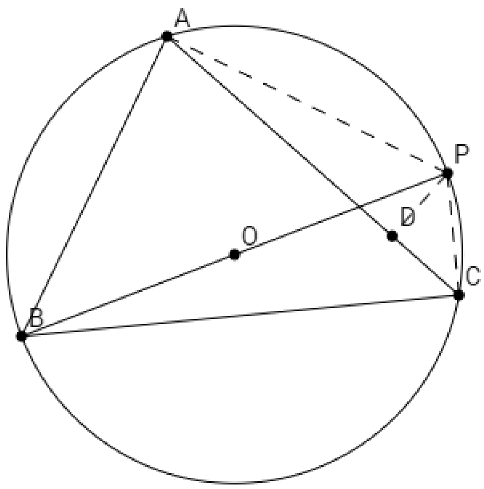
1) **Нуждается ли наше доказательство в каких-либо изменениях для того случая, когда треугольник ABC- тупоугольный?**

Ответ: Нет (см. рисунок для тупоугольного треугольника)



2) **Какая точка окружности имеет прямую CA своей прямой Симсона?**

Ответ: Точка, диаметрально противоположная точке B.



3) **Существуют ли какие-либо точки, лежащие на своей прямой Симсона? Какими прямыми они могут быть в этом случае?**

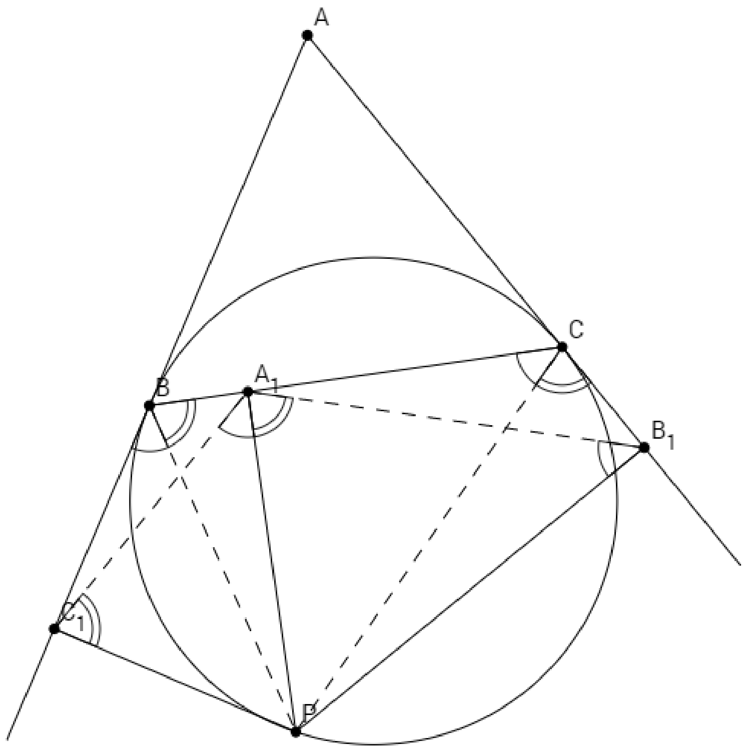
Ответ: Вершины треугольника лежат на своих собственных прямых Симсона.

Задача 8: **Две касательные к окружности, касающиеся ее в точках B и C, пересекаются в точке A. Пусть $A_1B_1\ C_1$ – педальный треугольник равнобедренного треугольника ABC для произвольной точки P на этой окружности, как на рисунке к вопросу 4. Тогда надо доказать, что**

$$|PA_1|^2 = |PB_1| * |PC_1|$$

Доказательство:

Проведем отрезки PB, PC, C_1A_1, A_1B_1. Точки A_1, P, B_1, C лежат на одной окружности, следовательно, **$\angle A_1B_1P = \angle A_1CP = \angle BCP = \angle C_1BP = \angle C_1A_1P$**. Точки A_1, B, C_1, P также лежат на одной окружности, откуда **$\angle PA_1B_1 = \angle PCB_1 = \angle PBC = \angle PBA_1 = \angle PC_1A_1$**. Значит, $\Delta PA_1B_1 \sim \Delta PC_1A_1$, следовательно, **$|PA_1|^2 = |PB_1| * |PC_1|$**.



Замечание (∗): $\angle BCP = \angle C_1BP$ и $\angle PBC = \angle PBA_1$ по теореме об угле между касательной и хордой.

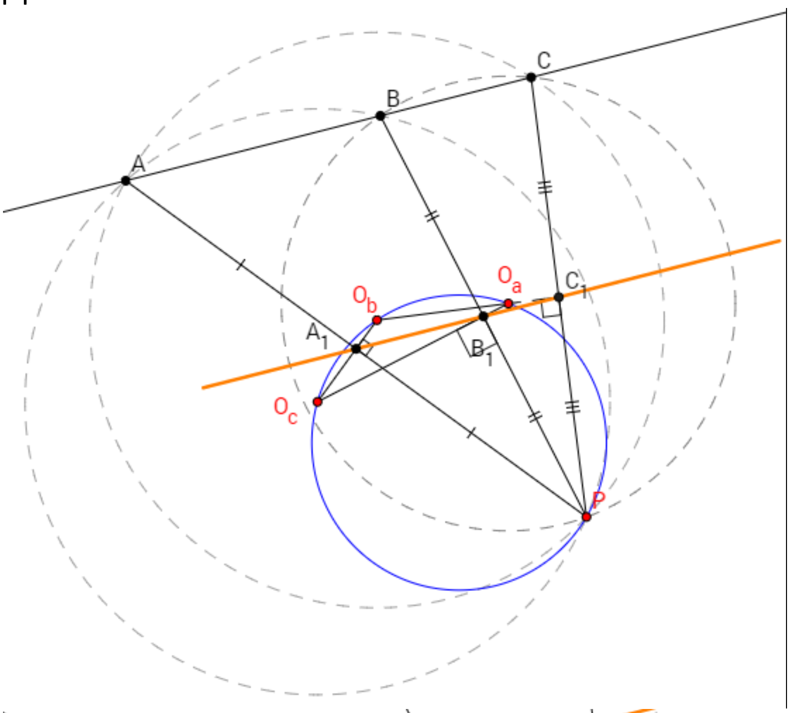
Задача 9: (**Теорема, обратная теореме о прямой Симсона): Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности данного треугольника.**

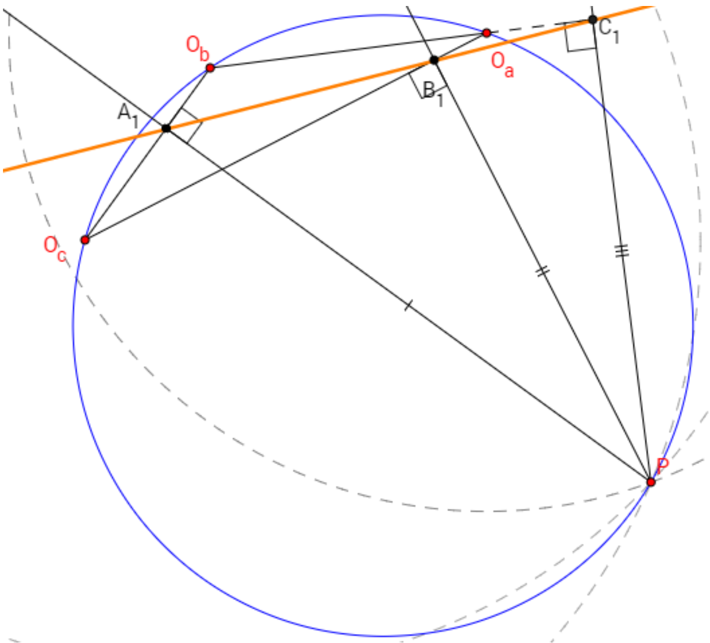
Доказательство:

Пусть P_1, P_2, P_3 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые, содержащие стороны Δ ABC: BC, AB, AC. **$\angle BP_1P_2 = \angle P_3P_1C$** (как вертикальные). Точки P_2, B, P_1, P лежат на одной окружности, следовательно, **$\angle BP_1P_2 = \angle BPP_2$**, точки C, P_3, P_1, P лежат на одной окружности, значит, **$\angle P_3P_1C = \angle P_3PC$**. Тогда **$\angle BPP_2 = \angle P_3PC$**, **$\angle P_2PP_3$** = $180° - \angle P_2AP_3$ = **$180° - \angle BAC$**, $\angle P_2PP_3 = \angle BPC$, следовательно, $\angle BPC = 180° - \angle BAC$. Таким образом, четырехугольник BACP – вписанный по признаку, т.е. точка P принадлежит окружности, описанной около Δ ABC.

Задача 10: **Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BPC, ACP и точка P лежат на одной окружности.**

Доказательство:

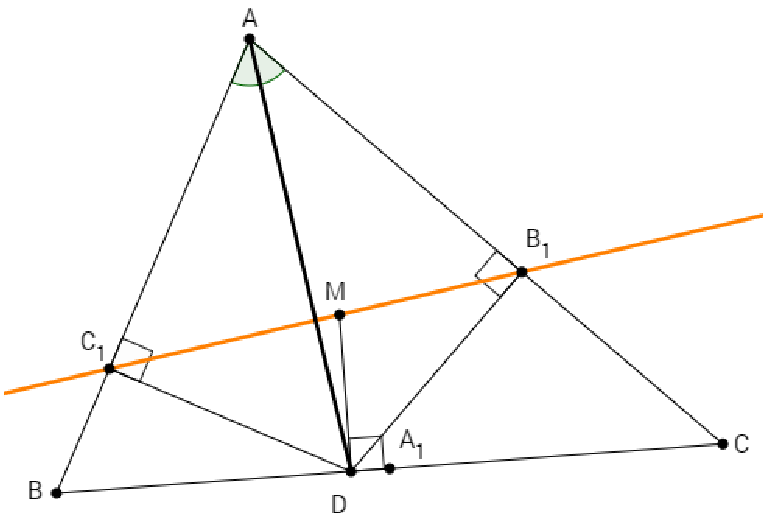


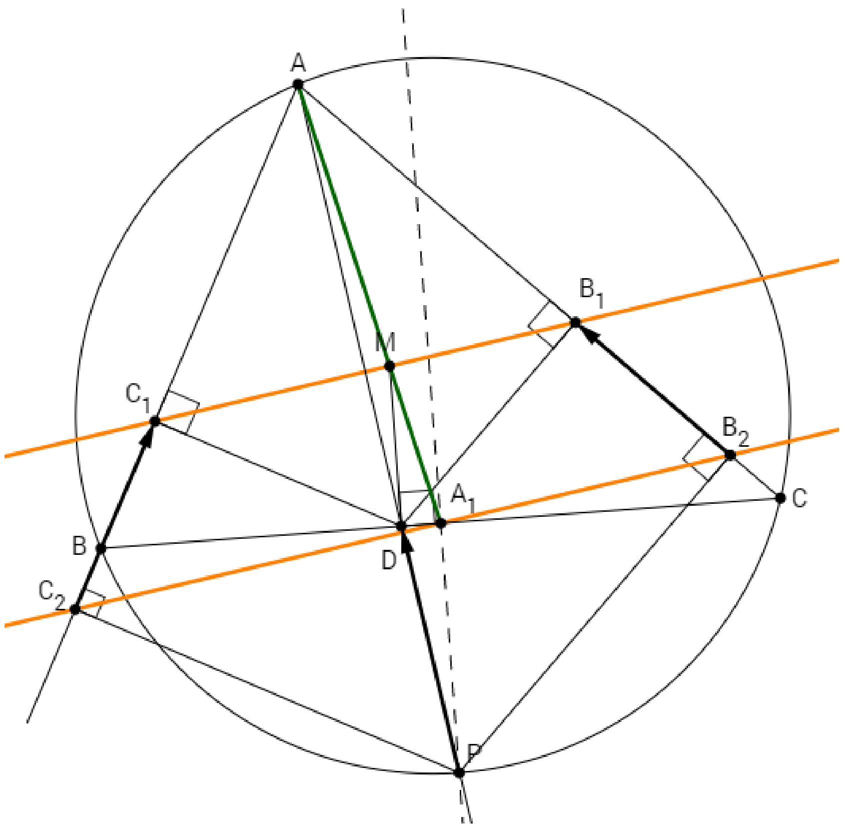


Пусть A_1, B_1, C_1 – середины отрезков PA, PB и PC; O_a, O_b, O_c – центры описанных окружностей треугольников Δ BCP, Δ ACP, Δ ABP. Точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны Δ $O_aO_bO_c$ (или их продолжения). Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, поэтому точка P лежит на описанной окружности Δ $O_aO_bO_c$ по задаче 2.

Задача 11: **В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB_1 и DC_1 на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой B_1C_1, причем DM перпендикулярно BC. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_2.**

Доказательство:





Пусть продолжение биссектрисы AD пересекает описанную окружность Δ ABC в точке P, B_2, C_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AC и AB. Поскольку серединный перпендикуляр к BC и продолжение биссектрисы AD пересекаются на описанной окружности Δ ABC, и если A_1 – середина BC, то PA_1 – перпендикуляр к BC. Рассмотрим гомотетию с центром в точке A, которая переводит точку P в точку D: $H_A(B_2) = B_1$; $H_A(C_2) = C_1$, следовательно, Δ AB_2C_2 переходит в Δ AB_1C_1, а так как B_1C_1 и B_2C_2 параллельны, то прямая B_2C_2 переходит в прямую B_1C_1. Следовательно, точка A_1 переходит в точку M, а значит, точка M лежит на медиане AA_1.

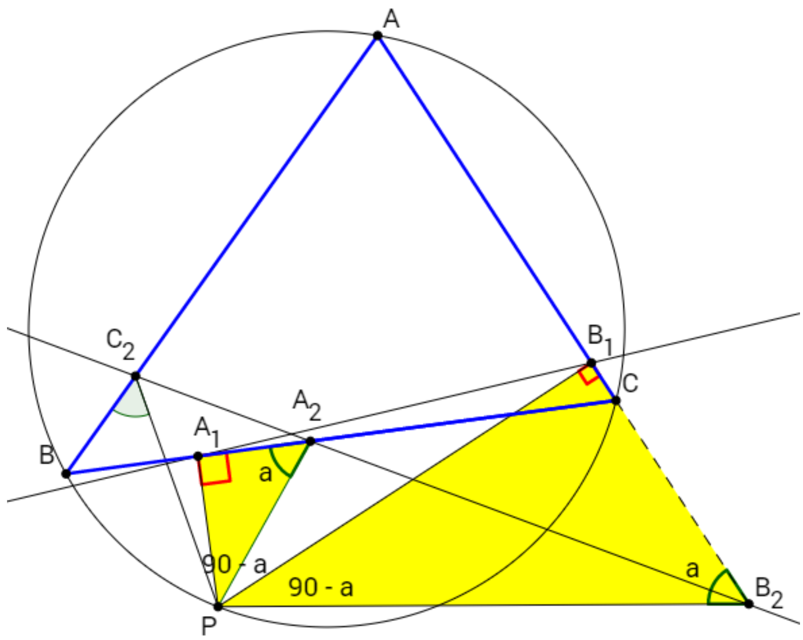
Задача 12: **Из точки P описанной окружности треугольника ABC проведены прямые PA_1, PB_1, PC_1 под данным (ориентированным) углом a к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB). Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.**

Доказательство:

Данное доказательство аналогично доказательству о прямой Симсона, т.к. в этом случае только используются другие признаки вписанного четырехугольника, а именно: если два равных угла опираются на один отрезок, то 4 точки лежат на одной окружности и если угол, смежный с углом четырехугольника, равен углу четырехугольника, противоположному первому, то 4 точки снова лежат на одной окружности.

Задача 13: **Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла 90° на угол α она повернется на угол 90° – α.**

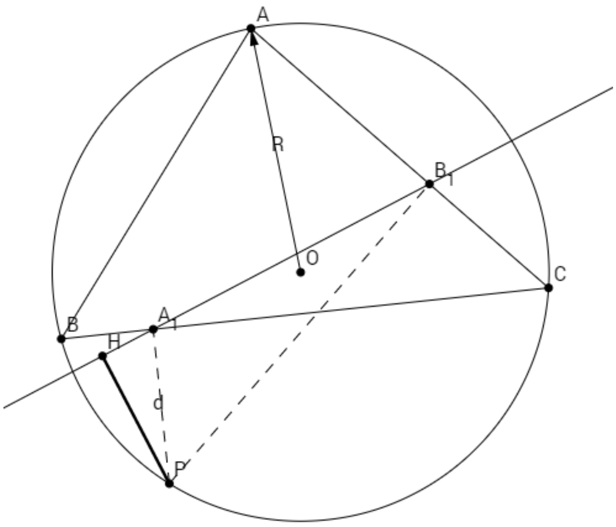
Доказательство:



Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA, точки A_2 и B_2 прямых BC и AC таковы, что $\angle (PA_2, BC) = \alpha = \angle (PB_2, AC)$. $\Delta PA_1A_2 \sim \Delta PB_1B_2$, следовательно, точки A_1 и B_1 переходят в A_2 и B_2 при поворотной гомотетии с центром P, причем $\angle A_1PA_2 = 90° - \alpha$ – угол поворота.

Задача 14: **Из точки P описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PA_1 и PB_1 на прямые BC и AC. Докажите, что $PA * PA_1 = 2Rd$, где R – радиус описанной окружности, d – расстояние от точки P до прямой A_1B_1.**

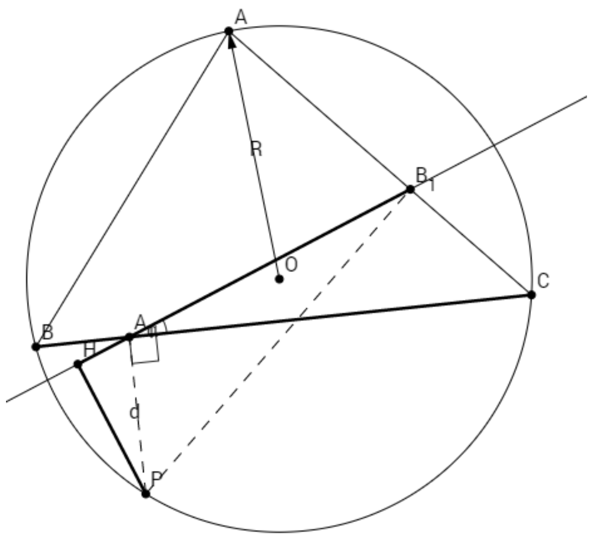
Доказательство:



Пусть угол между прямыми PC и AC равен φ. Тогда PA = 2R Sin φ. Так как точки A_1 и B_1 лежат на одной окружности с диаметром PC, угол между прямыми PA_1 и A_1B_1 тоже равен φ. Следовательно, по теореме синусов: $PA_1 = d / \sin \varphi$, значит, $PA * PA_1 = 2Rd$.

Задача 15: **Пусть α – угол между прямыми A_1B_1 и BC. Докажите, что Cos α = PA / 2R.**

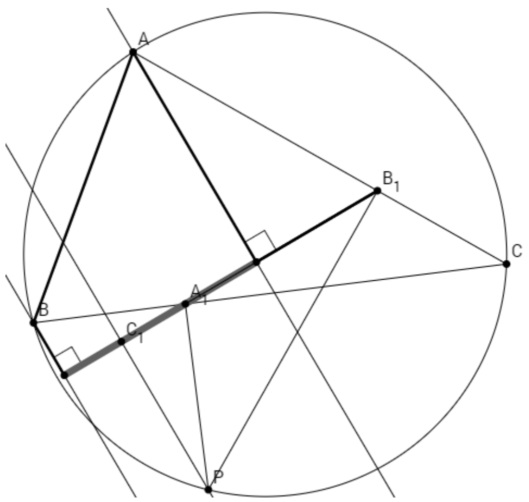
Доказательство:



Так как PA_1 перпендикулярно BC, то $\cos \alpha = \sin \varphi = d / PA_1$. Из предыдущей задачи: $PA_1 = 2Rd / PA$, следовательно, $\cos \alpha = PA / 2R$.

Задача 16: **Пусть A_1 и B_1 – проекции точки P описанной окружности треугольника ABC на прямые BC и AC. Докажите, что длина отрезка A_1B_1 равна длине проекции отрезка AB на прямую A_1B_1.**

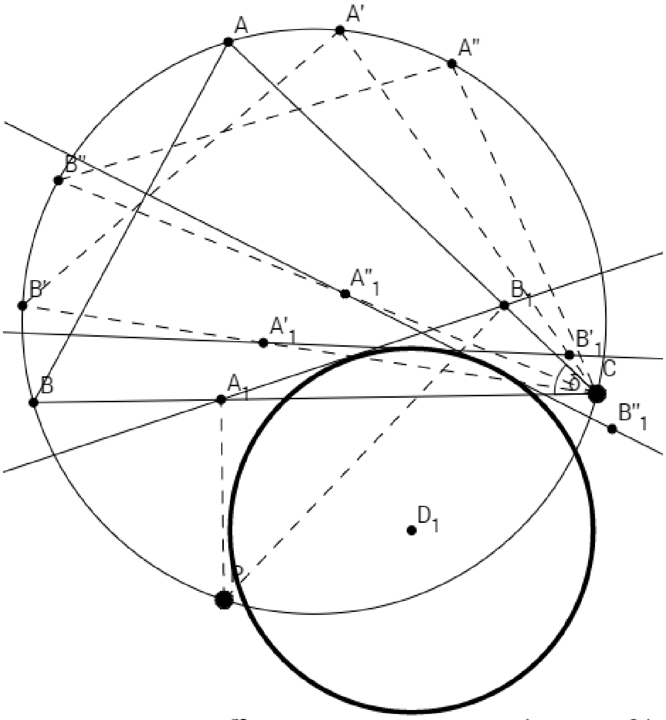
Доказательство:

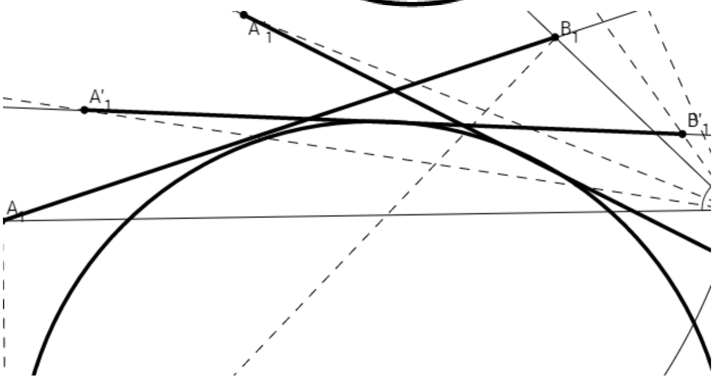


Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC. Следовательно, A_1B_1 = PC * Sin ∠ A_1CB_1 = PC * Sin ∠ C. Пусть угол между прямыми AB и A_1B_1 равен Υ, C_1 – проекция точки P на прямую A_1B_1. Так как прямые A_1B_1 совпадают, то Cos Υ = PC / 2R (по предыдущей задаче). Следовательно, длина проекции отрезка AB на прямую A_1B_1 равна AB * Cos Υ = (2R * Sin ∠ C) * PC / 2R = PC * Sin ∠ C = A_1B_1.

Задача 17: **На окружности фиксированы точки P и C; точки A и B перемещаются по окружности так, что угол ACB = const. Докажите, что прямые Симсона точки P относительно треугольника ABC касаются фиксированной окружности.**

Доказательство:

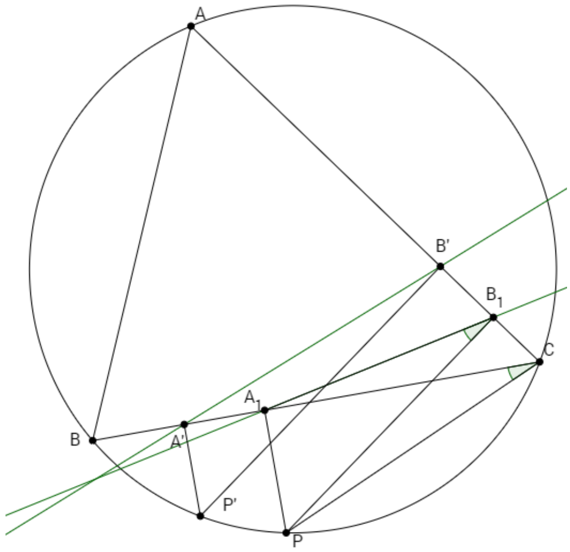




Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и AC. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC. Так как Sin ∠ A_1CB_1 = Sin ∠ ACB, то хорды A_1B_1 этой окружности имеют фиксированную длину. Следовательно, прямые A_1B_1 касаются фиксированной окружности.

Задача 18: **Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.**

Доказательство:



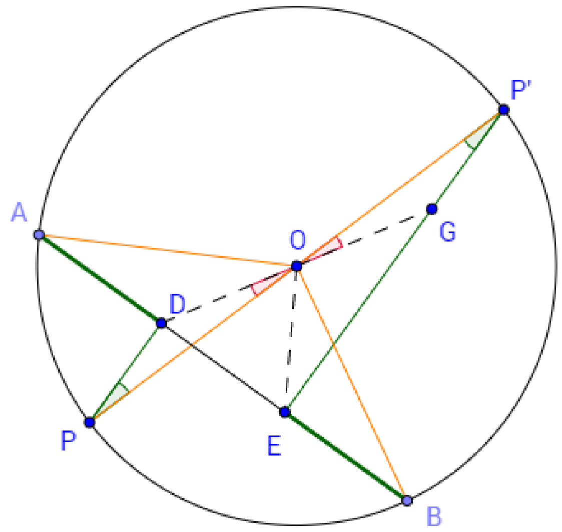
Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA. Тогда $\angle$ (A_1B_1, PB_1) = $\angle$ (A_1C, PC) = дуга BP / 2. Ясно также, что для всех точек P прямые PB_1 имеют одно и то же направление.

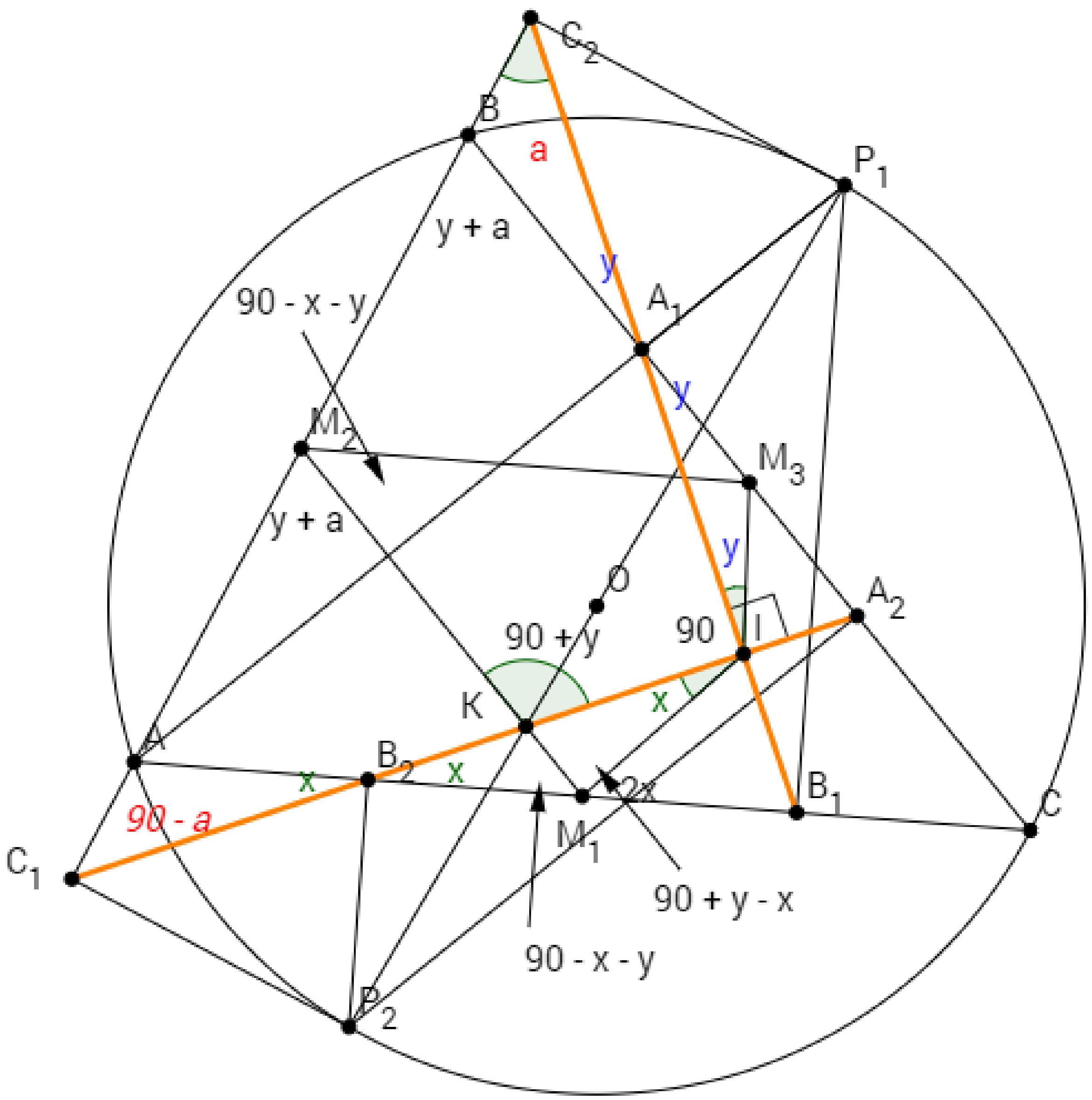
Задача 19: **Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.**

Доказательство:

По предыдущей задаче ясно, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности Δ ABC перпендикулярны, т.к. половина угловой величины дуги, которую проходит точка P, равные 180° / 2 = 90°.

Докажем, что отрезки AB_2 и CB_1 равны.

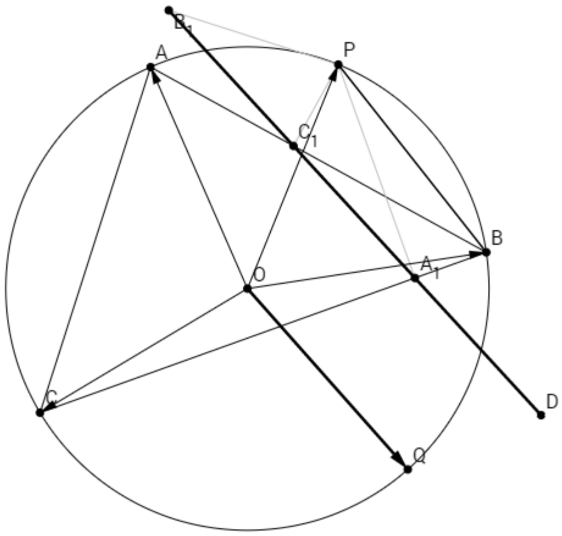

P'
A
O
G
D
P
E
B


C2
B
a
P1
y + a
y
A1
90 - x - y
y
M2
M3
y + a
y
O
A2
90 + y
90
I
x
K
A
B2
x
x
2x
B1
C
90 - a
M1
C1
90 + y - x
90 - x - y
P2

Отметим середины сторон AB, BC, AC – соответственно M_2, M_3, M_1. Пусть $\angle M_3IC_2 = y$, $\angle M_1IC_1 = x$. Отрезки IM_3 и IM_1 медианы в прямоугольных треугольниках, проведенные из вершины прямого угла, следовательно, $\angle M_3A_1I = y$; $\angle M_1B_2I = x$. Тогда $\angle C_2A_1B = y$ и $\angle C_1B_2A = x$ как вертикальные. Пусть $\angle C_1C_2I = \alpha$, тогда $\angle C_2C_1I = 90° - \alpha$. Тогда $\angle B = y + \alpha$ как внешний для ΔBC_2A_1. А так как $M_1M_2 // BC$, то $\angle C_1M_2M_1 = \angle B = y + \alpha$. Пусть прямые M_1M_2 и A_2C_1 пересекаются в точке K, **$\angle M_2KI$** $= (90° - \alpha) + (y + \alpha) =$ **$90° + y$**. Тогда в ΔKIM_1 : $\angle KM_1I = \angle M_2KI - \angle KIM_1 = (90° + y) – x = 90° + y – x$. $\angle IM_1B_1$ как внешний для ΔM_1IB_2 равен 2x, следовательно, **$\angle AM_1K$** $= 180° - \angle KM_1I - \angle IM_1B_1 = 180° - (90° + y – x) – 2x =$ **$90° - x – y$**. Прямые AC и M_2M_3 параллельны, следовательно, $\angle M_1M_2M_3 = \angle AM_1K = 90° - x – y$. Тогда мы получили, что в четырехугольнике $M_2M_3IM_1$ сумма $\angle M_1M_2M_3 + \angle M_1IM_3 = (90° - x – y) + (x + 90° + y) = 180°$, значит, этот четырехугольник **вписанный** по признаку. Следовательно, точка пересечения наших исходных прямых Симсона лежит на одной окружности с серединами сторон исходного треугольника, т.е. она лежит на окружности девяти точек или на окружности Эйлера.

Задача 20: **Точки A, B, C, P и Q лежат на окружности с центром O, причем углы между $\vec{OP}$ и векторами $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ и $\vec{OQ}$ равны α, β, ϒ и (α + β + ϒ) / 2. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна OQ.**

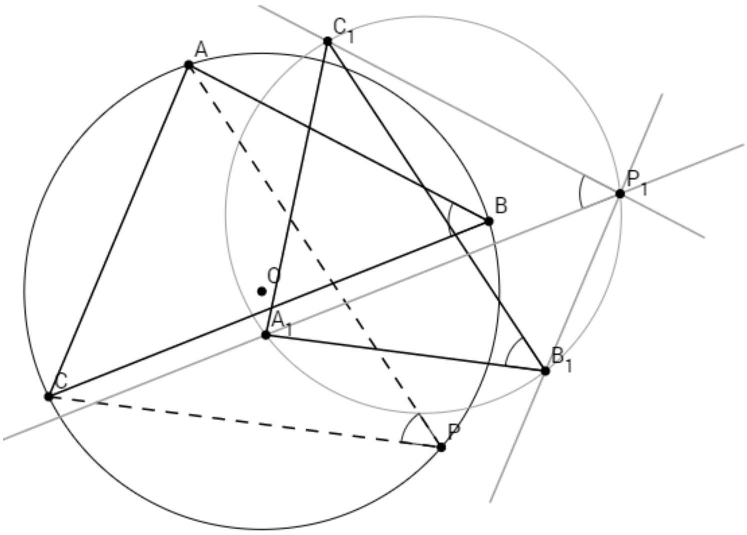
Доказательство:



Если точка R данной окружности такова, что $\angle(\vec{OP}, \vec{OR}) = (\beta + ϒ) / 2$, то $OR \perp BC$. Остается проверить, что $\angle(OR, OQ) = \angle(PA_1, A_1B_1)$. По условию получаем, что $\angle(OR, OQ) = \alpha / 2$. $\angle(PA_1, A_1B_1) = \angle(PB, BC_1)$, $\angle(PB, BC_1) = \angle(\vec{OP}, \vec{OA}) / 2 = \alpha / 2$, следовательно, $\angle(PA_1, A_1B_1) = \alpha / 2 = \angle(OR, OQ)$. А так как $OR \perp BC$ и $PA_1 \perp BC$, то прямая OQ, параллельна прямой A_1B_1, т.е. прямая Симсона точки P относительно ΔABC параллельна OQ.

Задача 21: **Точки A, B, C, P лежат на окружности с центром O. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны прямым PA, PB, PC (PA // B_1C_1 и т.д.). Через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ проведены прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке P_1, которая лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.**

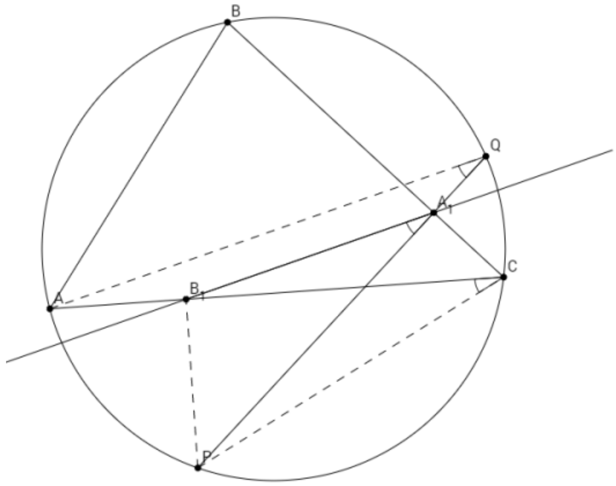
Доказательство:



$\angle$ CPA и $\angle$ CBA равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle$ CPA и $\angle A_1B_1C_1$ равны, а также равны $\angle$ CBA = $\angle A_1P_1C_1$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1P_1C_1$, т.е. это вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а значит, эти две прямые пересекаются на описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается для остальных пар прямых, значит, все они пересекаются в одной точке на описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$.

Задача 22: **Хорда PQ описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна стороне BC. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна прямой AQ.**

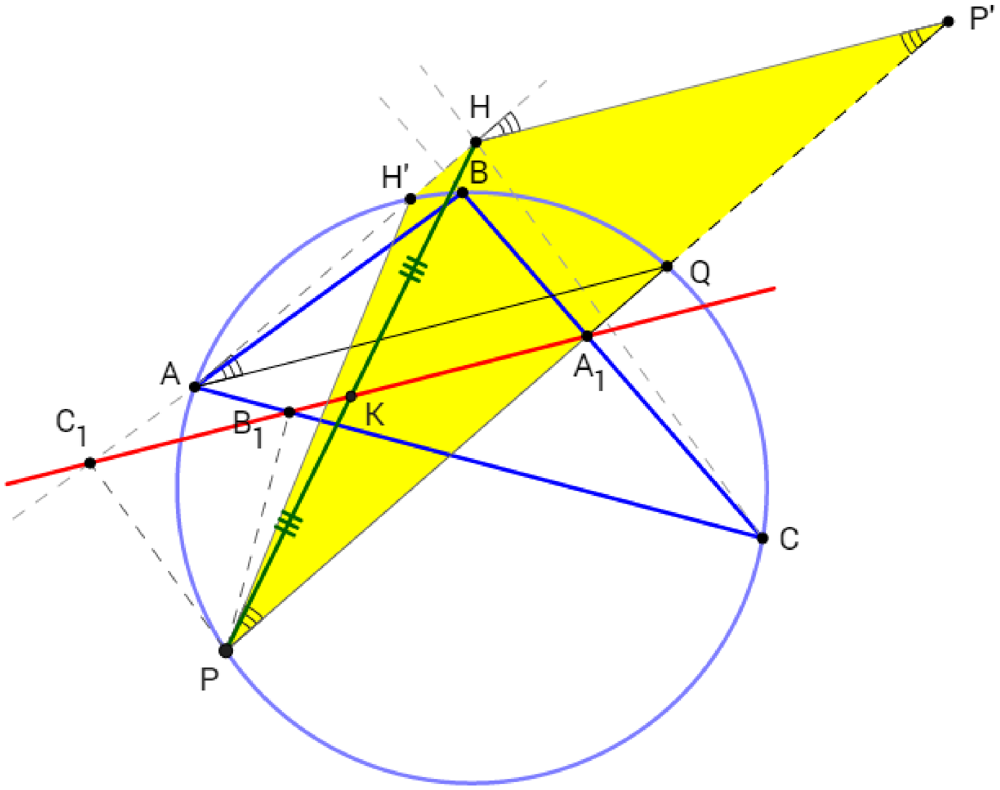
Доказательство:



Точки B_1, A_1, C и P лежат на одной окружности, следовательно, $\angle B_1A_1P = \angle B_1CP$. $\angle AQP = \angle ACP = \angle B_1CP$, так как это вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Таким образом, $\angle B_1A_1P = \angle AQP$ отсюда следует, что прямые AQ и A_1B_1 параллельны. Значит, AQ параллельны прямой Симсона точки P относительно Δ ABC.

Задача 23: **Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P – точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.**

Доказательство:



Проведем хорду PQ, перпендикулярную BC. Пусть точки H' и P' симметричны точкам H и P относительно прямой BC. Заметим, что по свойству ортоцентра точка H' лежит на описанной окружности около Δ ABC. Тогда: **∠ H'AQ = ∠ H'PQ**. Четырехугольник PH'HP' – трапеция, так как HH' параллельна PP. Докажем, что это равнобокая трапеция: действительно, из соображений симметрии, PH' = P'H, следовательно, углы при основании равны, т.е.: **∠ H'PQ = ∠ HP'Q**, значит, **∠ HP'Q = ∠ H'AQ**. Так как HH' // PP', то по свойству параллельных прямых: **∠ (H'H, HP') = ∠ HP'Q = ∠ H'AQ**. Следовательно, по признаку параллельных прямых: AQ // HP'. А так как по предыдущей задаче: AQ // A_1B_1, то **HP' // A_1B_1**. Заметим, что по определению симметрии: A_1 – середина PP'. Тогда в Δ PHP': по теореме Фалеса K – середина PH, т.е. прямая Симсона точки P относительно Δ ABC проходит через середину отрезка PH.

Замечание (*): Существует известная задача: Пусть ABC – равносторонний треугольник, вписанный в окружность с центром O, и пусть P – произвольная точка на этой окружности. Тогда прямая Симсона точки P делит пополам отрезок OP. Зная доказательство только что разобранной задачи под номером 16, легко догадаться до решения представленной задачи: в равностороннем треугольнике ортоцентр H совпадает с центром описанной окружности O, так что задача свелась к уже известной нам о том, что прямая Симсона проходит через середину отрезка PH.

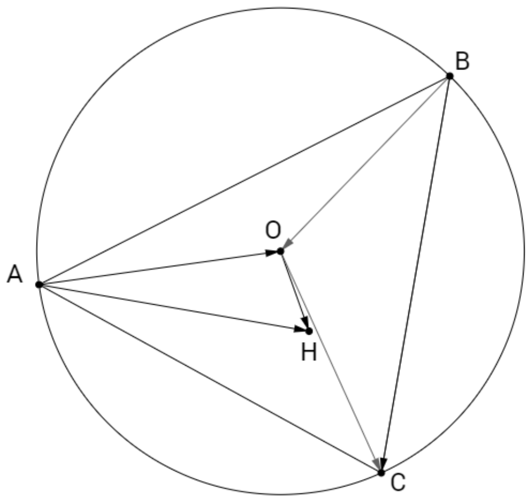
Задача 24: **Четырехугольник ABCD вписан в окружность; l_a – прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c, l_d определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.**

Доказательство:

Для начала докажем следующую теорему:

Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Докажите, что H – точка пересечения высот треугольника ABC.

Доказательство:

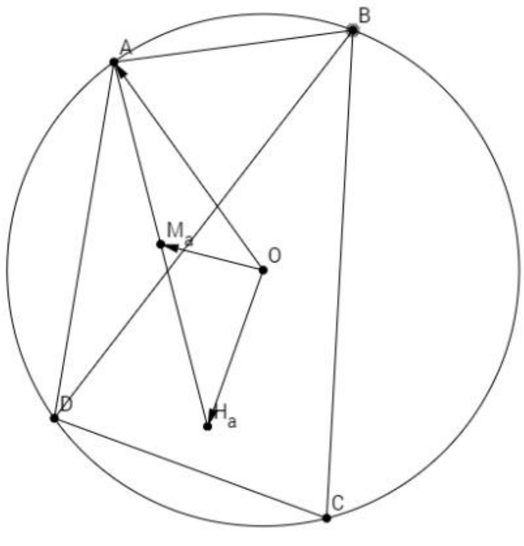


$\vec{AH} = \vec{OA} + \vec{OH} = \vec{AO} + \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OC}$; $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = -\vec{OB} + \vec{OC}$. Следовательно, $\vec{AH} * \vec{BC} = (\vec{OB} + \vec{OC}) * (-\vec{OB} + \vec{OC}) = -|\vec{BO}|^2 + \vec{OC} * \vec{BO} - \vec{BO} * \vec{OC} + |\vec{OC}|^2 = R^2 - R^2 = 0$, следовательно, $\vec{AH} \perp \vec{BC}$, значит, $AH \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$, тогда точка H – точка пересечения высот Δ ABC.

Теперь с помощью только что доказанной теоремы решим такую задачу:

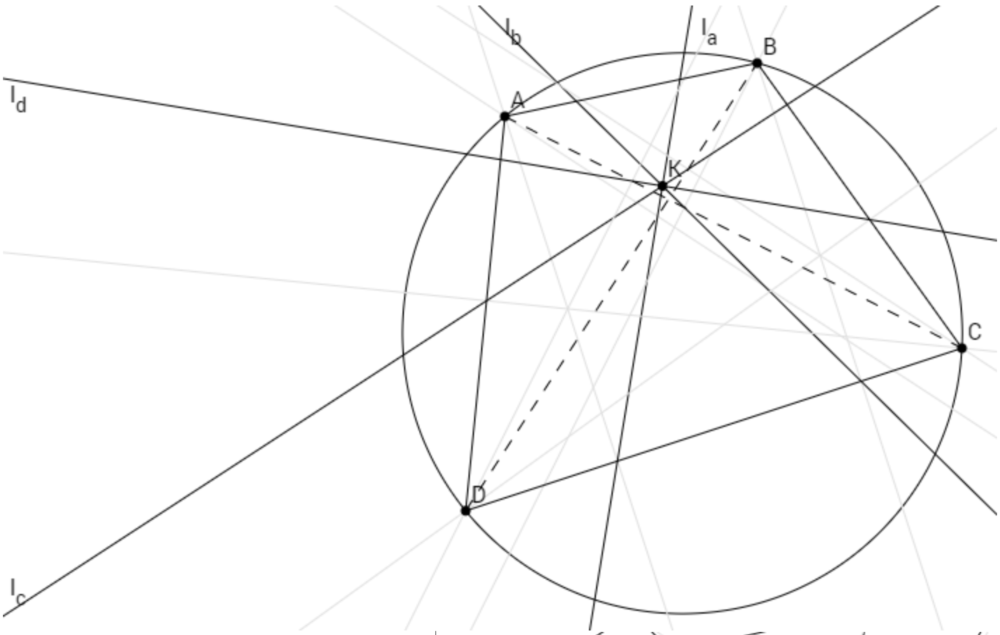
Четырехугольник ABCD вписанный. Пусть H_a – ортоцентр треугольника BCD, M_a – середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

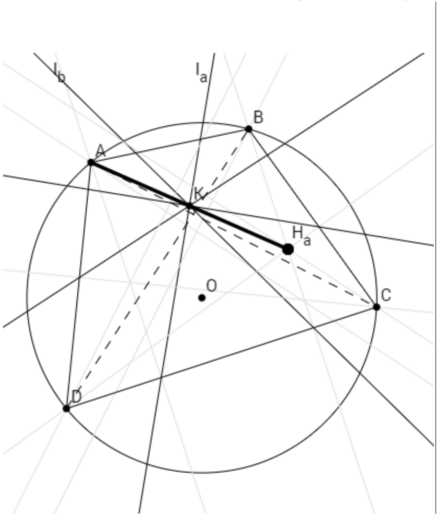
Доказательство:

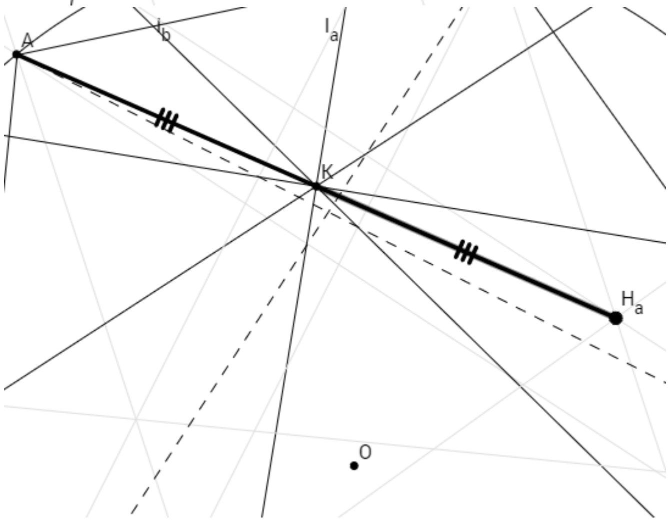


Пусть O – центр описанной окружности данного четырехугольника ABCD. Из предыдущей задачи (теоремы): $\vec{OH_a} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$. $\vec{OM_a} = (\vec{OH_a} + \vec{OA}) / 2 = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) / 2$. Аналогично доказывается, что $\vec{OM_b} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) / 2$, $\vec{OM_c} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) / 2$ и $\vec{OM_d} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) / 2$. Следовательно, $\vec{OM_a} = \vec{OM_b} = \vec{OM_c} = \vec{OM_d}$, значит, **точки M_a, M_b, M_c, M_d совпадают.**

А теперь с применением последнего факта решим данную задачу 24:





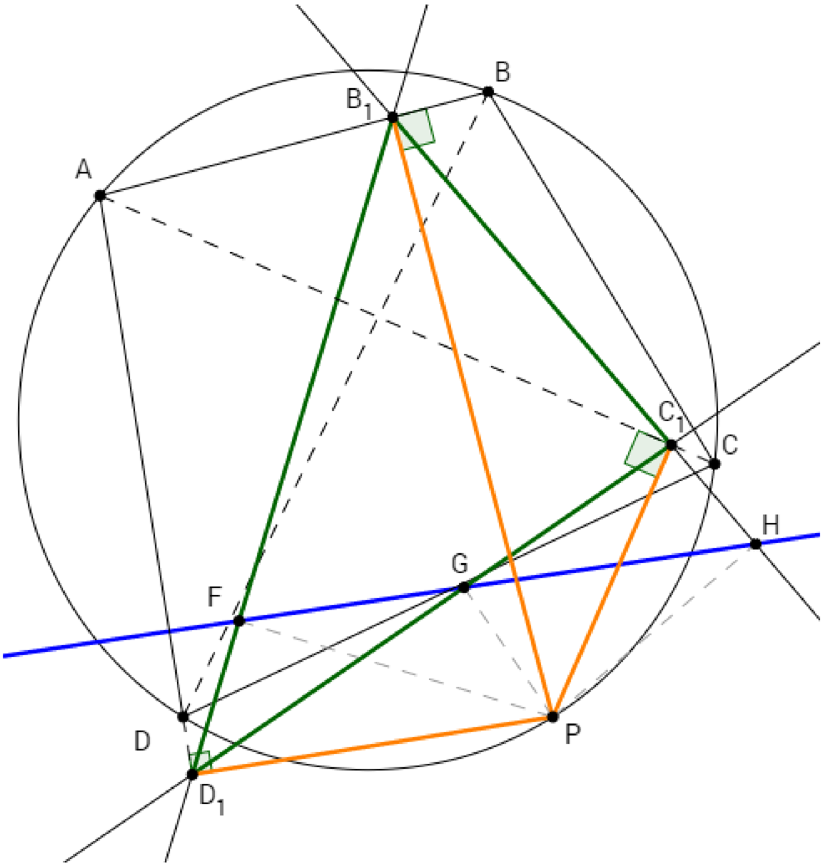


Пусть H_a, H_b, H_c, H_d – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Тогда по задаче 23: прямые l_a, l_b, l_c, l_d проходят через середины отрезков AH_a, BH_b, CH_c, DH_d соответственно.

А по предыдущей (вспомогательной) задаче: середины этих отрезков совпадают с такой точкой H, что $2\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$, где O – центр описанной окружности четырехугольника ABCD. Следовательно, прямые l_a, l_b, l_c, l_d пересекаются в одной точке.

Задача 25: **Докажите, что проекции точки P описанной окружности четырехугольника ABCD на прямые Симсона треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой.**

Доказательство:



Пусть B_1, C_1, D_1 – проекции точки P на прямые AB, AC, AD соответственно. Точки B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности с диаметром AP. Прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Следовательно, образовался треугольник $B_1C_1D_1$. Поэтому проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой – прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Аналогично доказывается, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек. Следовательно, проекции точки P на прямые Симсона треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой.

Замечание (*): **Такая прямая называется прмой Симсона четырехугольника (ABCD в данном случае).**

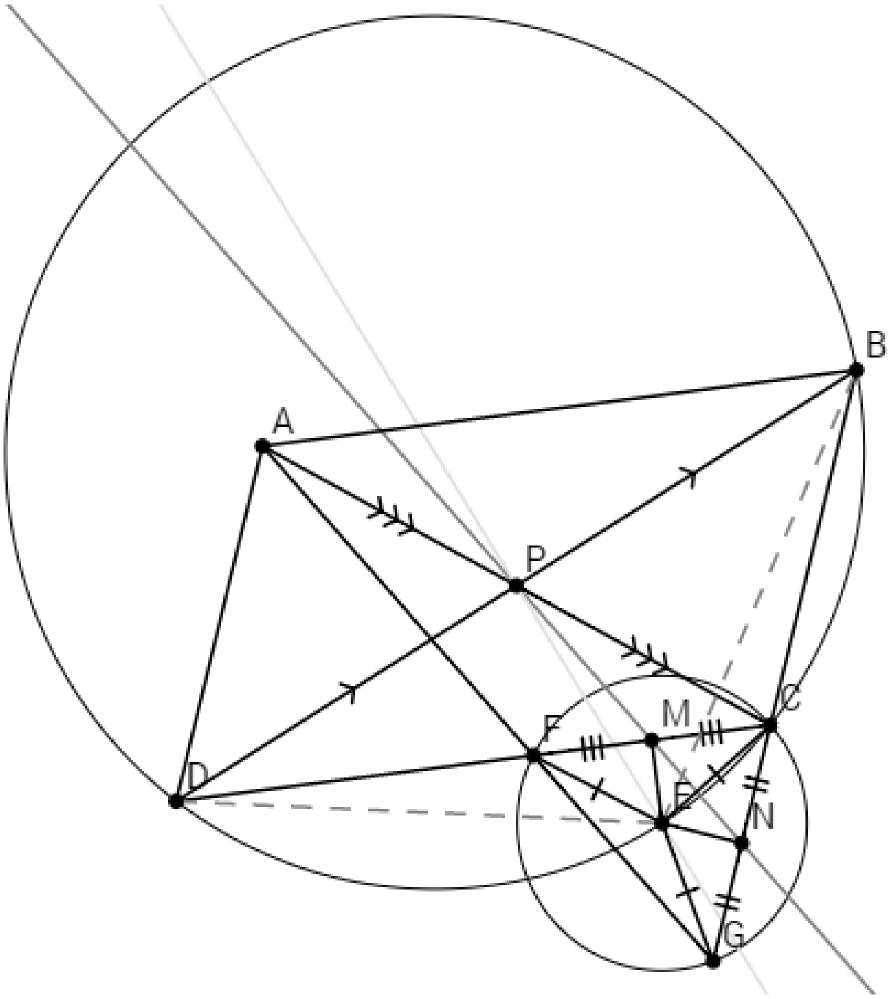
Задача 26: **Докажите, что аналогично по индукции можно определить прямую Симсона вписанного n – угольника как прямую, содержащую проекции точки P на прямые Симсона всех (n – 1) – угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n – угольника.**

Доказательство:

Пусть P – точка описанной окружности n – угольника $A_1…A_n$, B_2, B_3, B_4, …, B_n – проекции точки P на прямые A_1A_2, …, AA_n. Точки B_2, …, B_n лежат на окружности с диаметром A_1P. Докажем по индукции, что прямая Симсона точки P относительно n – угольника $A_1…A_n$ совпадает с прямой Симсона точки P относительно n – угольника $A_1…A_n$ совпадает с прямой Симсона точки P относительно (n – 1) – угольника $B_2…B_n$ (для n = 4 это было доказано в предыдущей задаче). По предложению индукции прямая Симсона (n – 1) – угольника $A_1A_3…A_n$ совпадает с прямой симсона (n – 2) – угольника $B_3…B_n$. Следовательно, проекции точки P на прямые Симсона (n – 1) – угольников, вершины которых получаются последовательным исключением точек A_2, …, A_n из набора A_1, …, A_n, лежат на прямой Симсона (n – 1) – угольника $B_2…B_n$. А проекция точки P на прямую Симсона (n – 1) – угольника $A_2…A_n$ лежит на этой же прямой потому, что наши рассуждения показывают, что любые n – 1 из рассматриваемых точек проекций лежат на одной прямой.

Задача 27: **Рассмотрим 5 точек A, B, C, D, E так что ABCD параллелограмм, BCED лежат на одной окружности. A ∈ l, прямая l пересекает внутренность DC в F и прямую BC в G. Пусть EF = EG = EC. Доказать, что l - биссектриса угла DAB.**

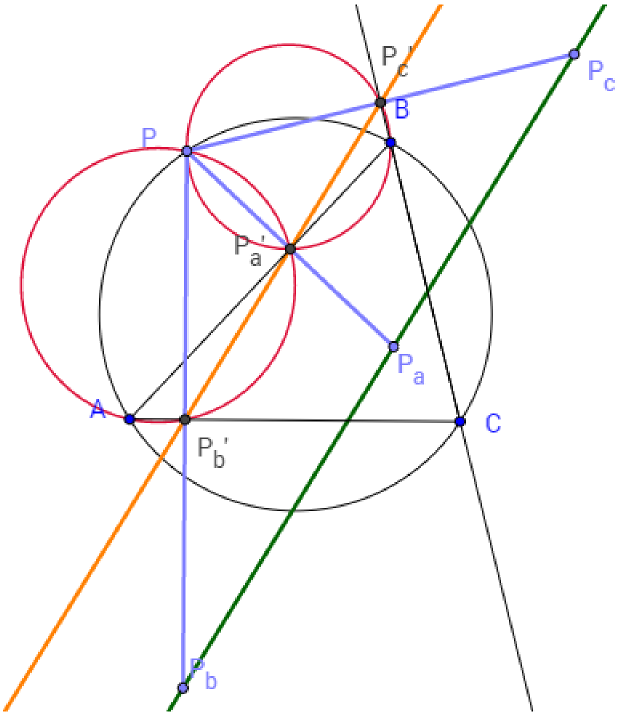
Доказательство:

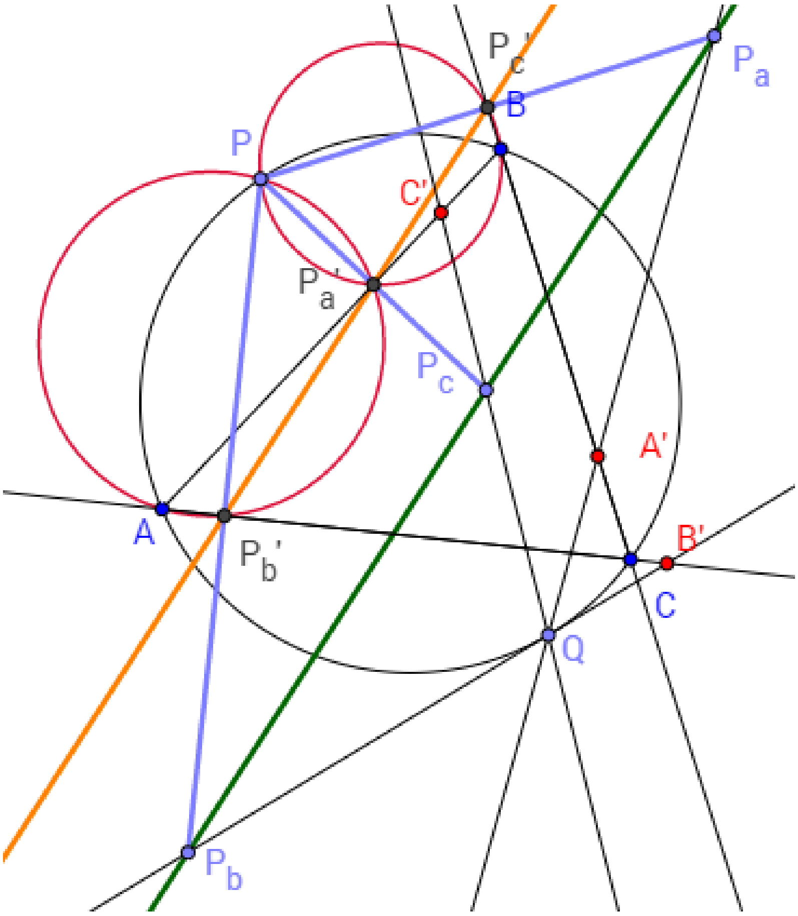


Пусть P, M, N – середины BD, CF, CG соответственно. EC = EF, значит, EM ⊥ CF, аналогично EN ⊥ CG. Рассмотрим гомотетию с центром в C и коэффициентом 1 / 2: при этом A, F, G переходят в P, M, N соответственно, следовательно, точки P, M, N лежат на одной прямой. Пусть P’ – основание высоты, опущенной из E на BD; так как точка E лежит на описанной окружности Δ BCD, точки P’, M и N лежат на одной прямой (прямой Симпсона). Тогда либо P = P’, либо E лежит на перпендикуляре к биссектрисе BD. Так как ∠ BPE = ∠ CME = 90° и ∠PBE = ∠ MCE, то Δ PEB = Δ MEC. ∠ MNC = ∠ MEC = ∠ PEB = 1 / 2 ∠ DEB = 1 / 2 ∠ DCB = 1 2∠D ℓ и прямая Симсона гомотетичны и паралллельны, следовательно, угол между ℓ и AD равен углу между MN и BC, значит, ℓ - биссектриса угла DAB.

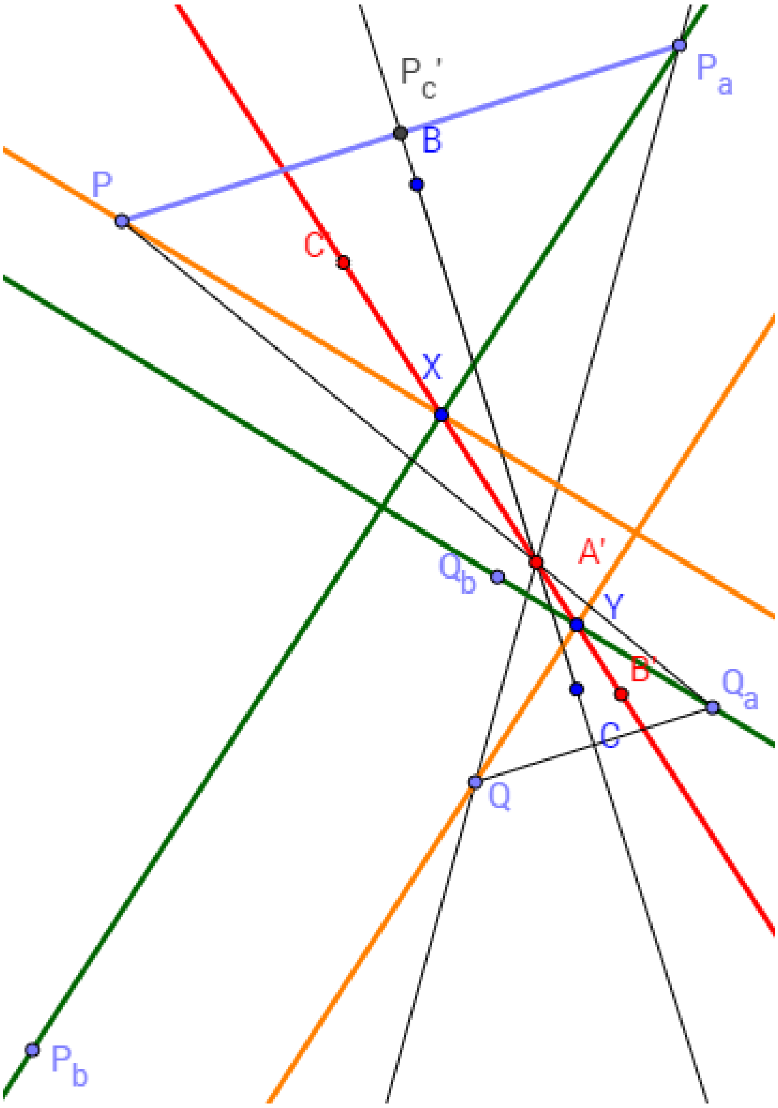
Задача 28: **Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A’. Точки B’ и C’ строятся аналогично. Докажите, что точки A’, B’ и C’ лежат на одной прямой.**

Доказательство:





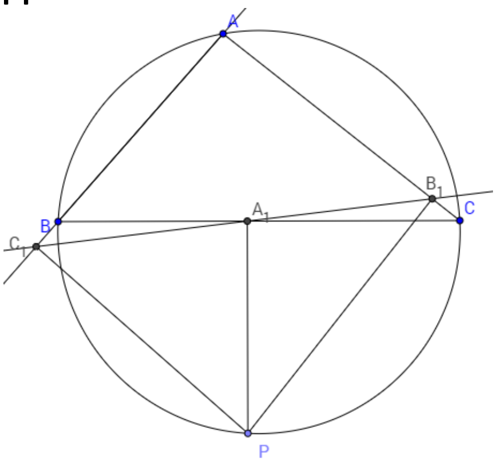
Пусть P_a', P_b', P_c' – проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника. Докажем, что эти точки лежат на одной прямой. Действительно, $\angle PP_c'P_a' = \angle PBP_a' = \angle PAC = 180° - \angle PP_c'P_b'$. Первое и последнее равенства верны в силу того, что четырехугольники $PP_a'BP_c'$ и $PP_c'P_bA$ вписанные. Полученная прямая является прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC. Следовательно, точки P_a, P_b и P_c также лежат на одной прямой, проходящей в два раза дальше от точки P, чем прямая Симсона. Аналогичное утверждение верно и для Q_a, Q_b и Q_c – точек, симметричных точке Q относительно сторон треугольника. Обозначим прямую, содержащую точки P_a, P_b и P_c, через ℓ_p, а прямую, содержащую точки Q_a, Q_b и Q_c – через ℓ_q. Рассматриваемые в задаче точки A', B' и C' можно определить как точки пересечения пар прямых PQ_a и QP_a, PQ_b и QP_b, PQ_c и QP_c.



Пусть прямая, параллельная ℓ_q и проходящая через P, пересекает ℓ_p в точке X (см. рис.). Пересечение прямой, параллельной ℓ_p и проходящей через Q, с прямой ℓ_q обозначим через Y. Стороны треугольника PXP_a соответственно параллельны сторонам треугольника Q_aYQ, а значит, эти треугольники гомотетичны. Прямые PQ_a, P_aQ и XY должны проходить через центр этой гомотетии, то есть точку A'. Таким образом, точка A' лежит на прямой XY. Аналогично можно показать, что на этой прямой лежат точки B' и C'.

Задача 29: (теорема Птолемея): **Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.**

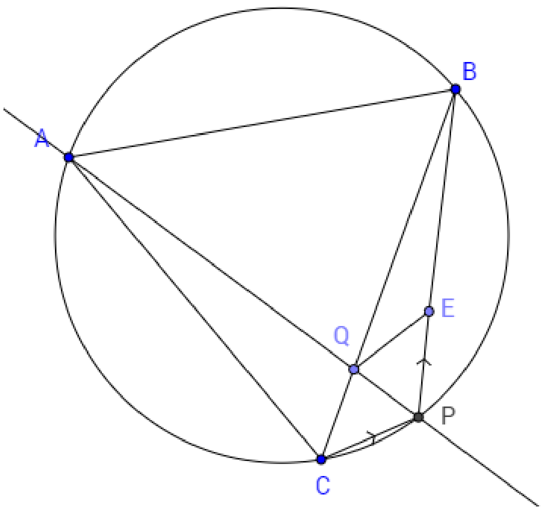
Доказательство:



$B_1C_1 = a * AP / 2R$, $A_1C_1 = b * BP / 2R$, $A_1B_1 = c * CP / 2R$, следовательно, так как $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$, мы выводим, что $c * CP + a * AP = b * BP$, т.е. AB * CP + BC * AP = AC * BP.

Задача 30: (на теорему Птолемея): **Если продолжение чевианы AQ равностороннего треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P, то 1 / PB + 1 / PC = 1 / PQ.**

Доказательство:



Отложим на PB отрезок PE = PC. Тогда: так как ∠ BAP = ∠ BCP и ∠ BCP = ∠ PEQ (из равенства треугольников QEP и QCP – так как ∠ BPA = ∠ CPA (треугольник ABC равносторонний), то четырехугольник ABEQ – вписанный по признаку. Значит, по теореме о секущих: PE * PB = PQ * PA.

Следовательно, PC * PB = PQ * PA. По теореме Птолемея в четырехугольнике ABPC: PB * AC + PC * AB = PA * BC, а так как треугольник ABC равносторонний, то AB = AC = BC, то PB + PC = PA. Следовательно, PB * PC = (PB + PC) * PQ. Тогда 1 / PC + 1 / PB = 1 / PQ.

Точка Тебо

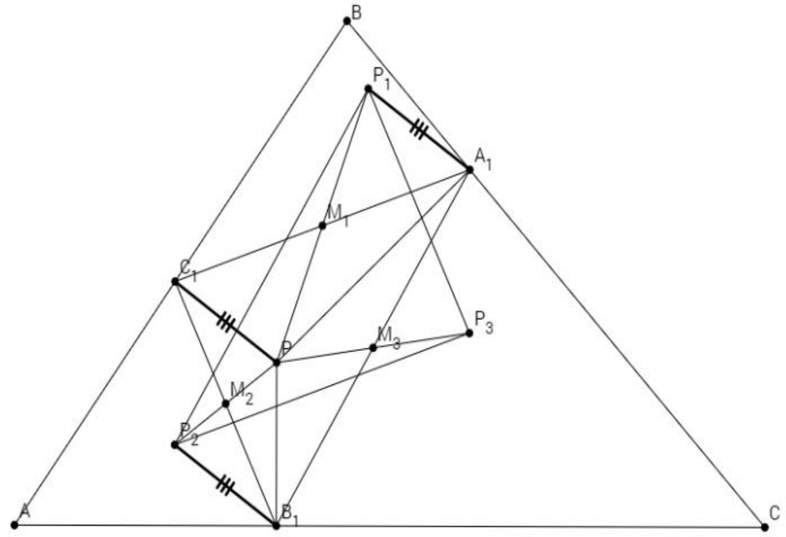
Задача 31: **Пусть A_1, B_1, C_1 – проекции точки P на стороны (или продолжения сторон) треугольника ABC; P_1, P_2, P_3 – точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$; H_1, H_2, H_3 – основания высот треугольника ABC. Тогда точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно.**

Доказательство заключается в том, что мы можем рассматривать точки, одинаково расположенные по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, потому что несложно показать, что данные треугольники подобны.

Следствие 1: **Пусть A_1, B_1, C_1 – проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника ABC; H_1, H_2, H_3 – основания высот. Тогда точки P_1, P_2, P_3, одинаково расположенные с точкой P по отношению к треугольникам AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC, совпадают с ортоцентрами треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.**

Доказательство основывается на свойстве ортоцентра – точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны треугольника, лежит на описанной окружности этого треугольника.

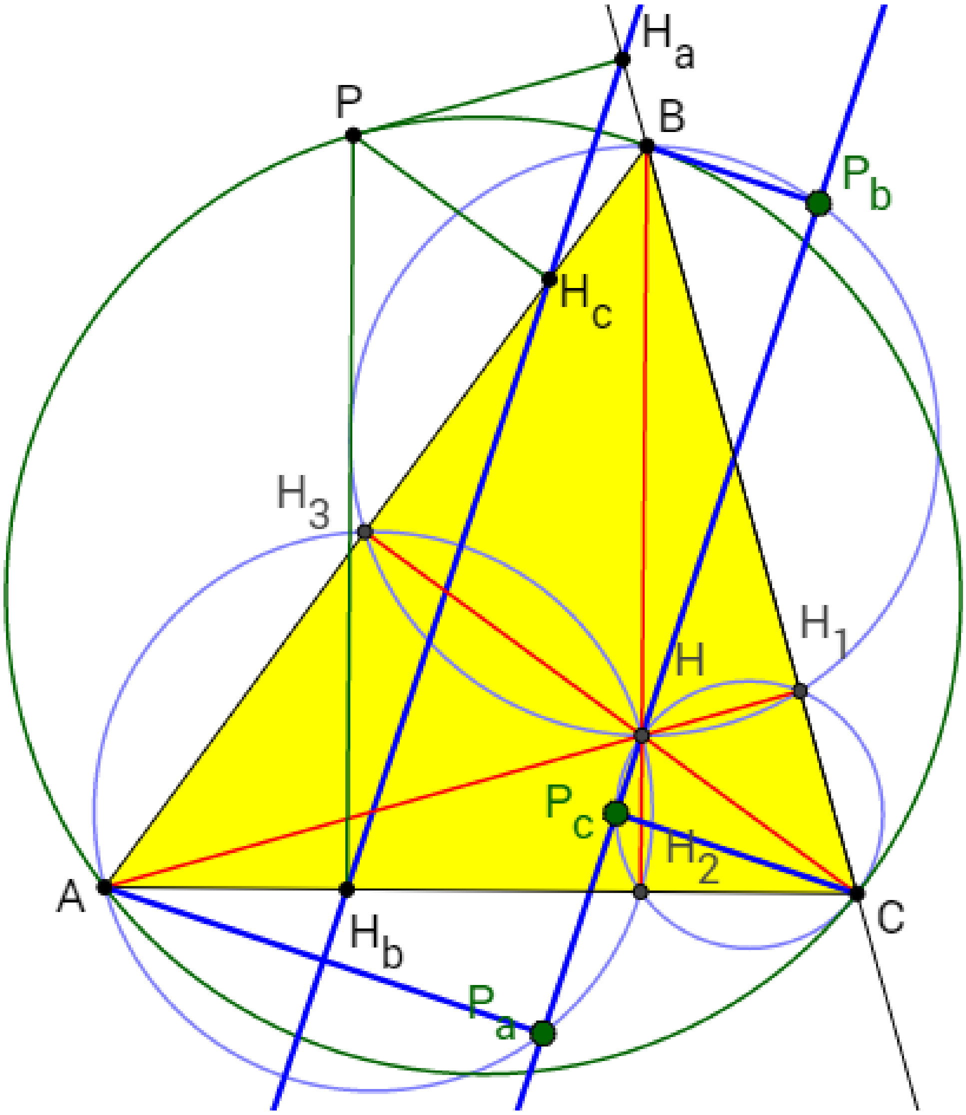
Задача 32: **Пусть H_1, H_2, H_3 – основания высот треугольника ABC; точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположенные с точкой P по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ равен педальному треугольнику $A_1B_1C_1$ точки P относительно треугольника ABC, причем стороны треугольников $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны.**



Доказательство:

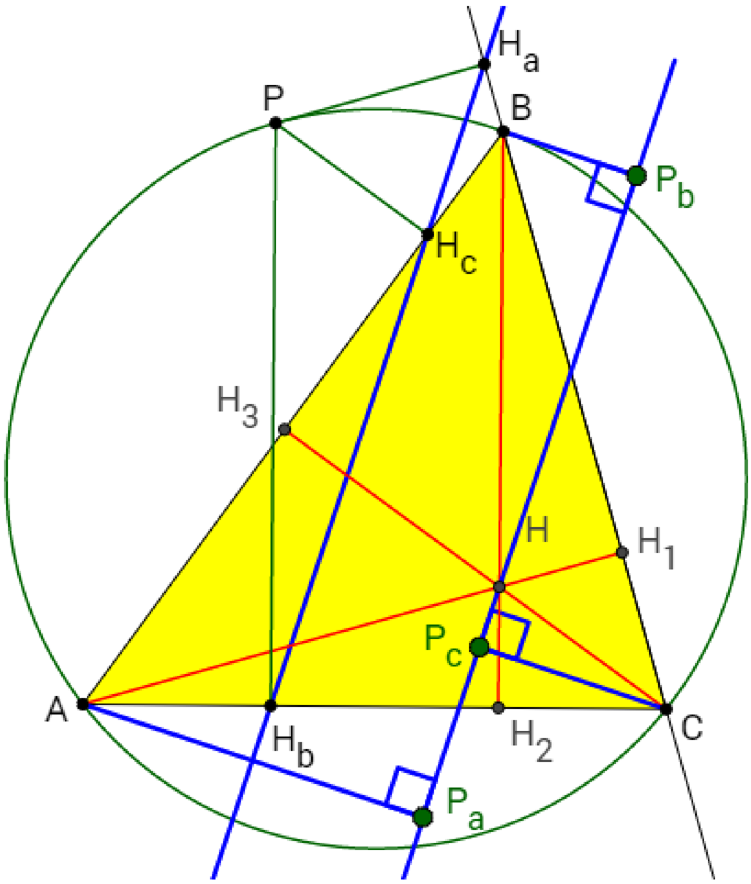
$B_1P_2C_1P$ и $PC_1P_1A_1$ параллелограммы по признаку, тогда $B_1P_2 = PC_1$; $B_1P_2 \parallel PC_1$ и $A_1P_1 = PC_1$; $A_1P_1 \parallel PC_1$, значит, $B_1P_2 = A_1P_1$; а также $B_1P_2 \parallel A_1P_1$, следовательно, $P_2P_1A_1B_1$ – параллелограмм. Тогда $P_1P_2 = A_1B_1$ и $P_1P_2 \parallel A_1B_1$, далее аналогично.

Рассмотрим теперь конфигурацию, изображенную на следующем рисунке. Проведем через ортоцентр H треугольника ABC прямую, которая пересечет описанные окружности треугольников AH_2H_3, BH_1H_3, CH_1H_2 в точках P_a, P_b, P_c соответственно.



Так как $\angle P_aHH_2 = \angle P_cHH_2 = \angle P_bHB$, а $\angle AH_2H_3 = \angle CH_2H_1 = \angle H_1BH_3$, то точки P_a, P_b, P_c одинаково расположены относительно подобных треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2. **Пусть P – точка, одинаково расположенная с точками P_a, P_b, P_c относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2**; H_a, H_b, H_c – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда согласно **следствию 1** точки P_b, P_c, P_a совпадают с ортоцентрами треугольников H_aBH_c, H_aCH_b, H_cAH_b соответственно, т.е. $BP_b \perp H_aH_c$, $CP_c \perp H_aH_b$, $AP_a \perp H_bH_c$. Но $\angle BP_bH = \angle CP_cH = \angle AP_aH = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры описанных окружностей треугольников BH_3H_1, CH_1H_2, AH_2H_3, поэтому $H_aH_c \parallel P_bH$, $H_aH_b \parallel P_cH$, $H_bH_c \parallel P_aH$. Вспомнив, что точки H_a, H_b, H_c также лежат на одной прямой. Кроме того, $H_aH_b = P_aP_b$, $H_bH_c = P_bP_c$, $H_cH_a = P_cP_a$ как противоположные стороны параллелограммов $P_aH_bH_aP_b$, $P_cH_bH_cP_b$, $P_aH_cH_aP_c$. Таким образом, **следствие 2** справедливо и в случае вырожденного педального треугольника.

Задача 33: **Прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно бисектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.**



Доказательство:

Проведем отрезки AP_a, BP_b, CP_c. Так как отрезки AH, BH, CH являются диаметрами описанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, то $\angle AP_aH = \angle BP_bH = \angle CP_cH = 90°$ и поэтому отрезки AP_a, BP_b, CP_c параллельны. Поскольку точки P, P_a, P_b, P_c одинаково расположены относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, то прямые AP_a, BP_b,

CP_c симметричны прямым AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC. А мы только что доказали, что прямая $P_aP_cHP_b$ || прямой Симсона точки P.

Переформулируем только что доказанную теорему:

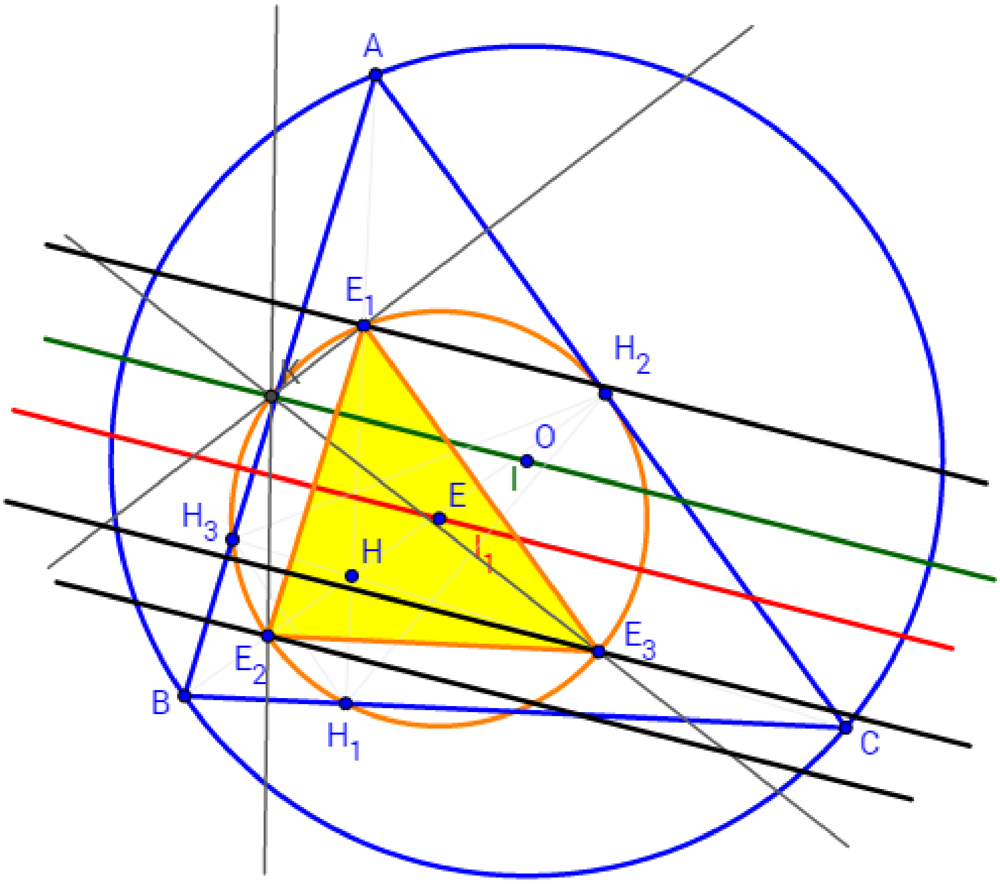
Прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, изогональным прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C треугольника ABC.

Заметим, что попутно мы доказали, что для точки P описанной окружности треугольника ABC прямые, изогональные прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C треугольника ABC, параллельны. **Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке.** Тогда можно сказать, что точка P', изогональная точке P, лежащей на описанной окружности Δ ABC, бесконечно удалена. Верно и обратное, т.е. точка P, изогональная бесконечно удаленной точке P', относительно Δ ABC, лежит на описанной окружности этого Δ. Следовательно, **(∗): Прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, изогональные параллельным прямым ℓ_a', ℓ_b', ℓ_c' относительно Δ ABC, пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности этого треугольника.**

Задача 34: **Пусть прямая ℓ, проходящая через центр описанной окружности Δ ABC, одинаково расположена с прямыми ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c относительно Δ ABC, Δ AH_2H_3, Δ BH_3H_1, Δ CH_1H_2. Тогда прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера этого треугольника.**

Доказательство:

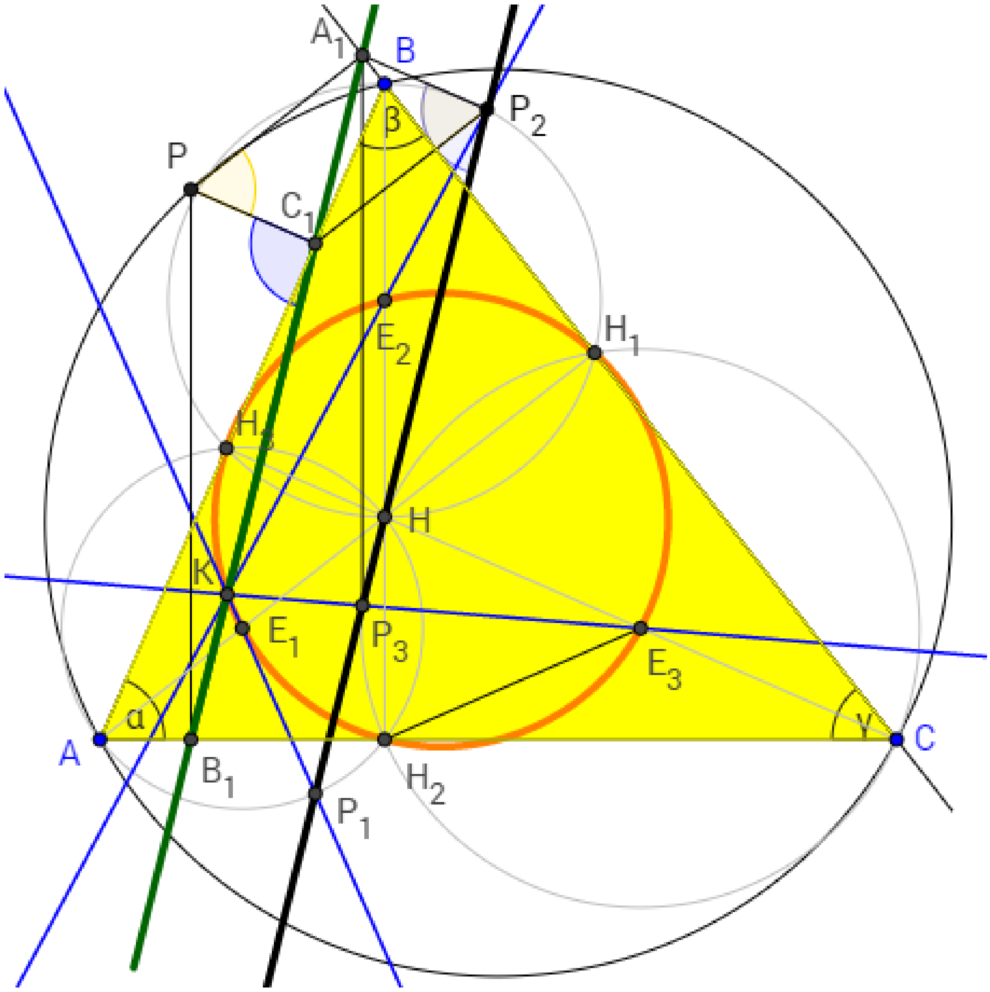
Пусть E – центр окружности Эйлера, H – ортоцентр треугольника ABC, E_1, E_2, E_3 – середины отрезков AH, BH, CH. Проведем через точку E прямую ℓ_1, параллельную ℓ, а через точки E_1, E_2, E_3 – прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, одинаково расположенные с прямой ℓ относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2. Поскольку треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 при симметрии относительно Δ ABC переходят в треугольники, гомотетичные Δ ABC, то прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c изогональны относительно Δ $E_1E_2E_3$ прямым ℓ_a', ℓ_b', ℓ_c', параллельным прямой ℓ_1 и проходящим через вершины Δ $E_1E_2E_3$. Поэтому в силу **(∗):** ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности Δ $E_1E_2E_3$, совпадающей с окружностью Эйлера Δ ABC.



Следствие 4: **Прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC. <u>Эта точка называется точкой Тебо.</u>**

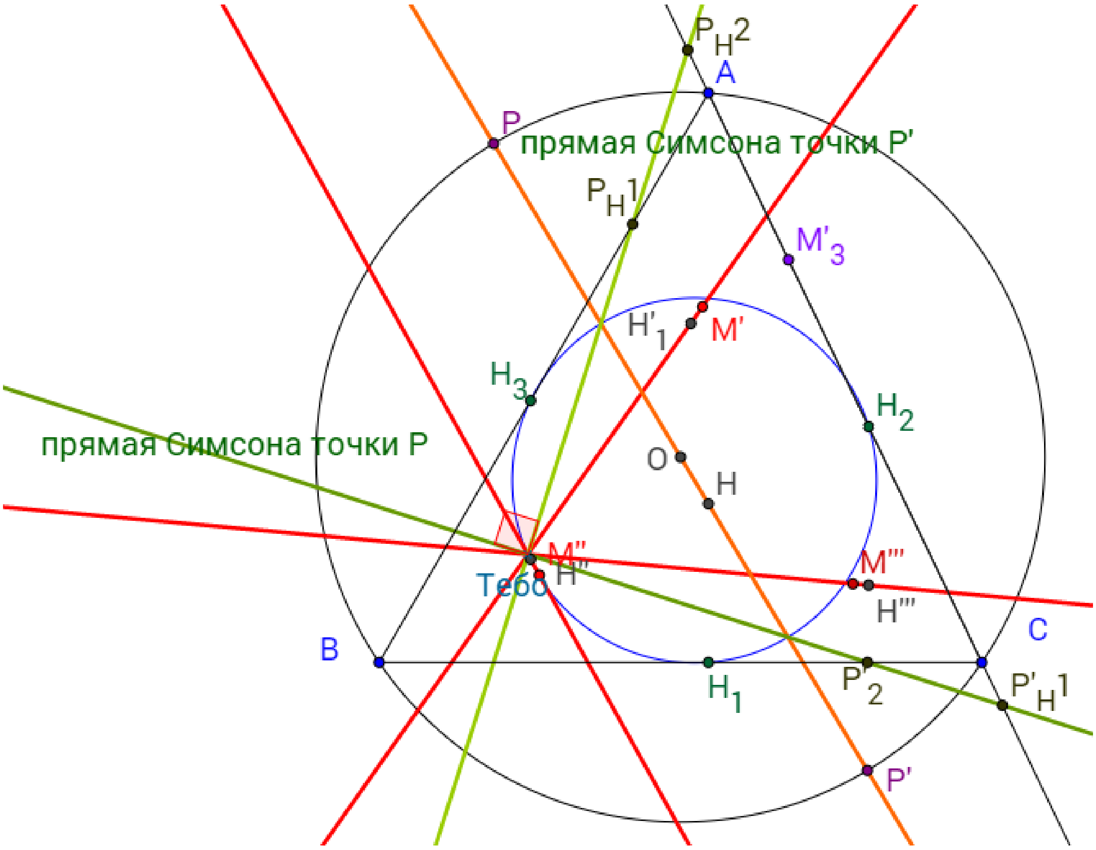
Задача 35: **Пусть P – произвольная точка описанной окружности Δ ABC; AH_1, BH_2, CH_3 – его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 – середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 – точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в точке K окружности Эйлера Δ ABC, через которую проходит прямая Симсона точки P относительно Δ ABC.**

Доказательство:



Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \Upsilon$. Так как P_2 и P_3 – ортоцентры треугольников A_1BC_1 и B_1CA_1 **(по следствию 1)**, то $\angle P_2A_1P_3 = \angle P_2A_1C + \angle P_3A_1C = 90° - \angle C_1P_2A_1 + 90° - \Upsilon = 180° - \angle C_1P_2A_1 - \Upsilon$. $\angle C_1P_2A_1 = \angle C_1PA_1$ как противоположные углы параллелограмма $PA_1P_2C_1$. $\angle C_1PA_1 + \angle C_1BA_1 = 180°$, поскольку четырехугольник PA_1BC_1 вписанный. Следовательно, $\angle P_2A_1P_3 = (180° - \angle C_1P_2A_1) - \Upsilon = \angle C_1BA_1 - \Upsilon = 180° - \beta - \Upsilon = \alpha = \angle E_2KE_3 = \angle P_2KP_3$ (заметим, что $\angle E_2KE_3 = \alpha$, так как $H_2E_3 = HE_3$, как медиана в прямоугольном треугольнике H_2HC => ΔH_2HE_3 – равнобедренный => $\angle E_3H_2H = \angle E_3HH_2 = \alpha$ => $\angle E_2KE_3 = \angle E_2H_2E_3 = \alpha$ как вписанные углы). Значит, точки P_2, K, A_1, P_3 лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки P_3, B_1, P_1, K также лежат на одной окружности. Так как точка C_1 лежит на прямой Симсона A_1B_1, то $\angle B_1C_1P + \angle PC_1A_1 = 180°$. $\angle B_1C_1P = \angle A_1P_2P_3$, $\angle A_1C_1P = \angle B_1P_1P_3$ как углы с соответственно параллельными сторонами. $A_1P_2P_3K$ – вписанный, следовательно, $\angle P_3KA_1 = 180° - \angle A_1P_2P_3 = 180° - \angle B_1C_1P = \angle PC_1A_1$. $B_1P_1P_3K$ – вписанный, значит, $\angle P_3KB_1 = 180° - \angle B_1P_1P_3 = 180° - \angle A_1C_1P = \angle PC_1B_1$. Тогда $\angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle PC_1A_1 + \angle PC_1B_1 = 180°$, отсюда следует, что точка K лежит на прямой A_1B_1. Значит, справедлива:

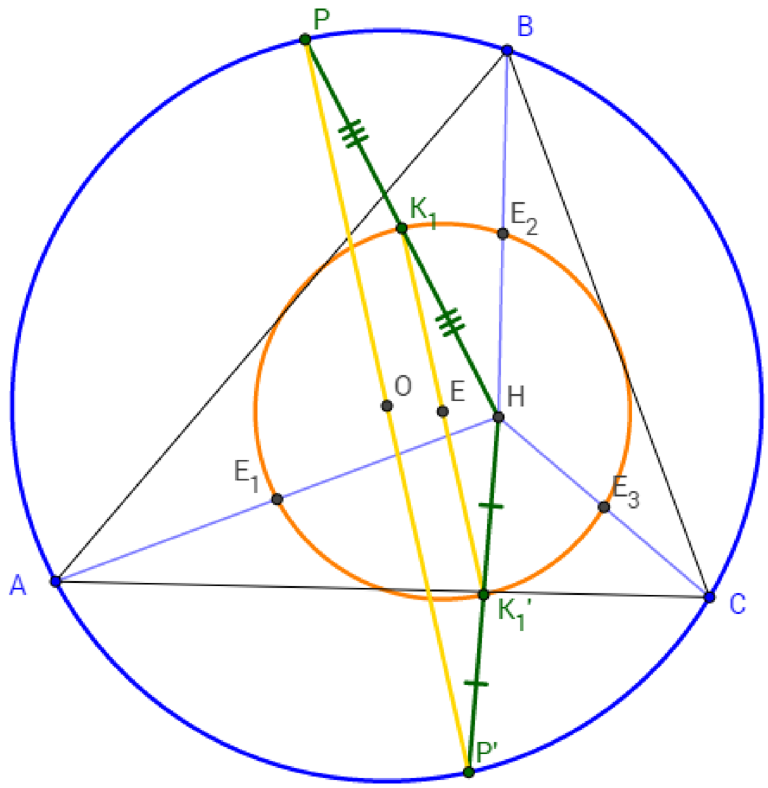
Теорема: **Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты Δ ABC, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 – середины отрезков AH, BH, CH; P_1, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ – прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно. Пусть ℓ пересекает описанную окружность Δ ABC в точках P и P'. Тогда прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и прямые Симсона точек P и P' относительно Δ ABC пересекаются в точке Тебо на окружности Эйлера Δ ABC.**



Первый факт был уже доказан ранее (точка Тебо); PP’ – диаметр описанной окружности Δ ABC, так как прямая Эйлера проходит через ее центр => так как было доказано в главе 2, что прямые Симсона диаметрально противоположных точек пересекаются на окружности Эйлера данного треугольника, то по теореме 3 в точке Тебо пересекаются прямые Симсона точек P и P’.

Задача 36**: Вторые точки пересечения прямых Симсона диаметрально противоположных точек P и P’ с окружностью Эйлера треугольника ABC являются концами ее диаметра, параллельного PP’.**

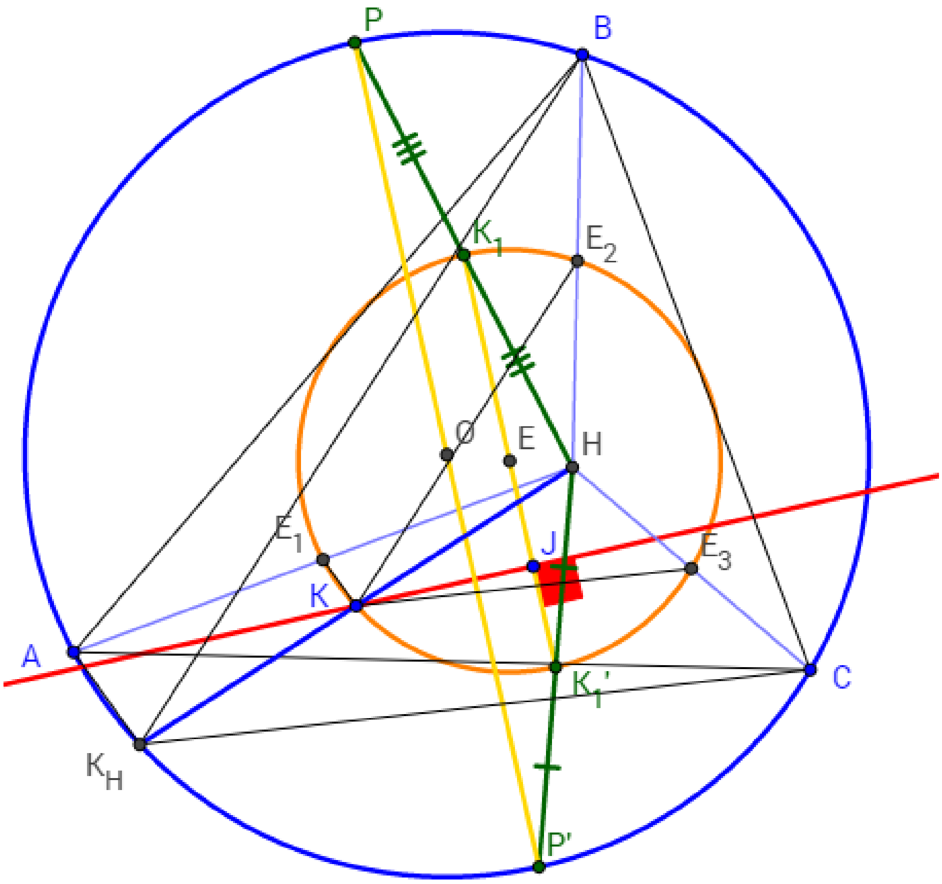
Доказательство:



Как было установлено выше, прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны (задача 19), поэтому K_1K_1' – диаметр окружности Эйлера, где K и K' – вторые точки пересечения прямых Симсона точек P и P' с окружностью Эйлера. Рассмотрим прямую Симсона ℓ точки P. Точка K пересечения этой прямой с окружностью девяти точек совпадает с точкой пересечения прямых E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3, одинаково расположенных с прямой OP относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC (O – как всегда центр описанной окружности треугольника ABC). Вторая точка K_1 пересечения прямой Симсона ℓ точки P с окружностью Эйлера совпадает с серединой отрезка PH, где H – ортоцентр треугольника ABC. Аналогично, точка K_1' совпадает с серединой отрезка P'H, и, таким образом, диаметр K_1K_1' окружности Эйлера является средней линией треугольника PHP' и, следовательно, параллелен диаметру PP'.

Задача 37: **Пусть P и P' – диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника ABC, K – точка пересечения прямых Симсона точек P и P', лежащая на окружности Эйлера треугольника ABC, K_1 и K_1' – вторые точки пересечения прямых Симсона точек P и P' с окружностью Эйлера, K_H – точка, симметричная ортоцентру H относительно точки K. Тогда прямая Симсона точки K_H перпендикулярна диаметру K_1K_1' окружности Эйлера треугольника ABC.**

Доказательство:

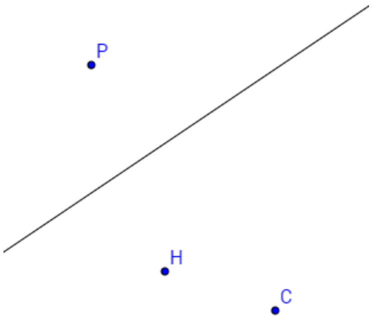


Прямые KE_1, KE_2, KE_3 изогональны диаметрально й прямой PP'. Поэтому и параллельные им прямые K_HA, K_HB, K_HC также изогональны этой прямой. Как мы уже говорили, прямая Симсона точки P перпендикулярна параллельным прямым, изогональным прямым PA, PB, PC. Отсюда следует, что прямая Симсона точки K_H перпендикулярна диаметру PP', а, значит, и параллельному ему диаметру K_1K_1' окружности Эйлера треугольника ABC.

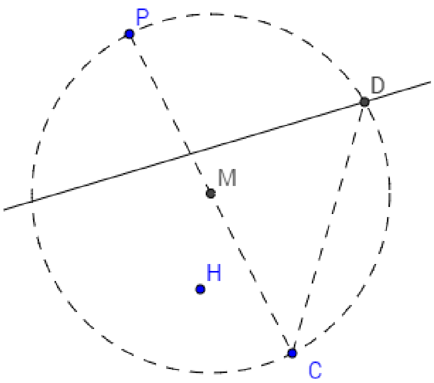
Авторские задачи

Задача 38: **Построить треугольник ABC по данной вершине C, ортоцентру H, точке P, принадлежащей описанной окружности треугольника и прямой Симсона этой точки.**

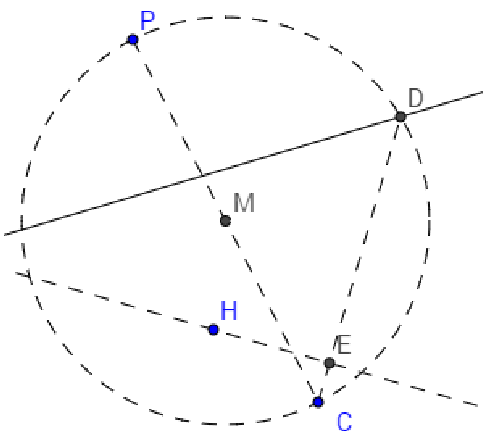
Дано:



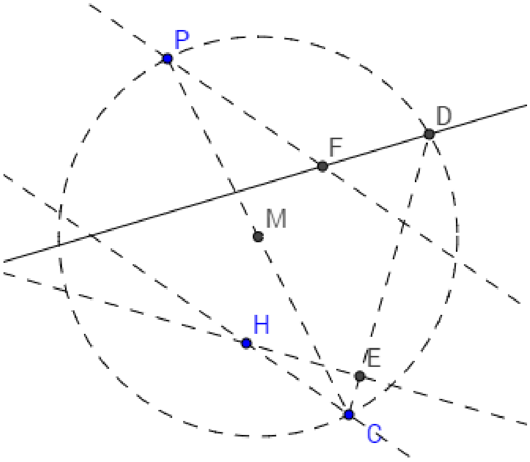
Построим ГМТ, из которого отрезок PC виден под прямым углом, пусть прямая Симсона пересечет данную окружность в точке D



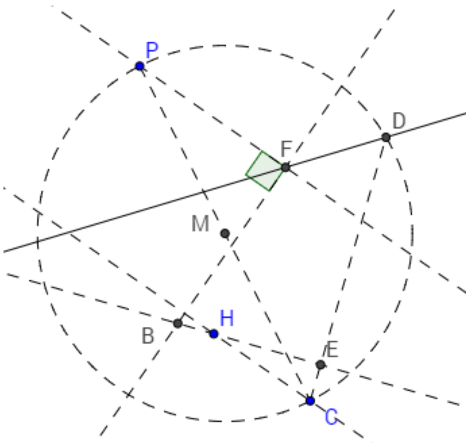
Проведем прямую, перпендикулярную CD и проходящую через точку H



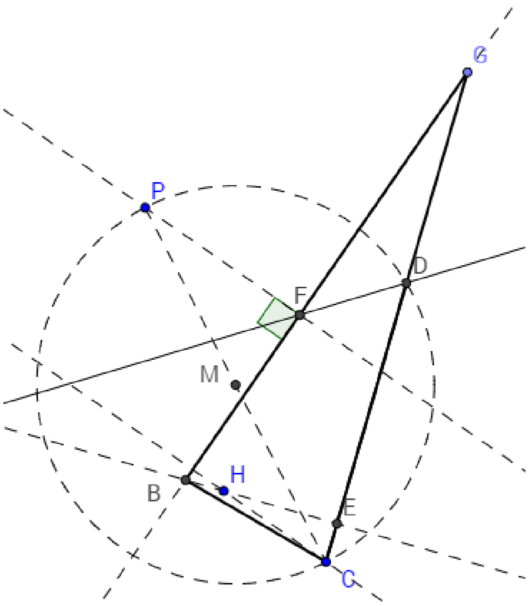
Через точку P проведем прямую, параллельную HC, пусть она пересечет прямую Симсона в точке F



Через точку F проведем прямую, перпендикулярную PF, пусть она пересечет прямую EH в точке B

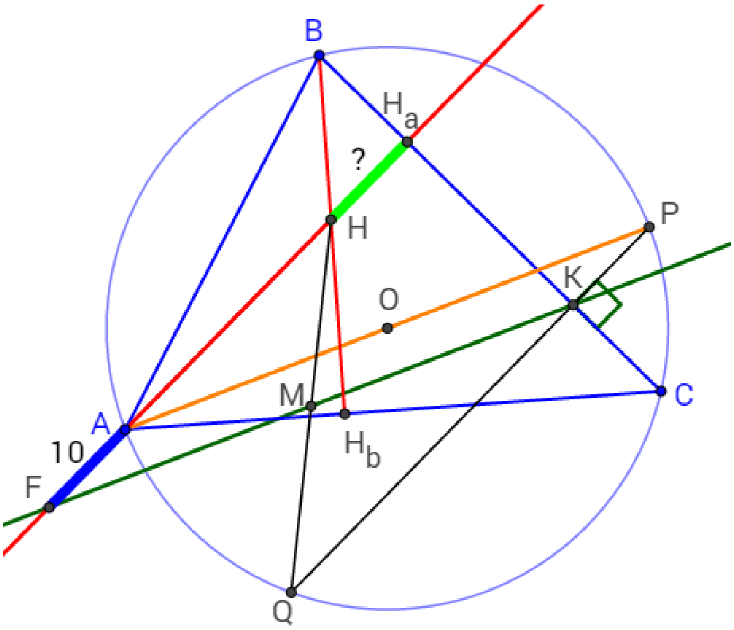


Пусть BF и CD пересекаются в точке A. Тогда треугольник ABC – искомый

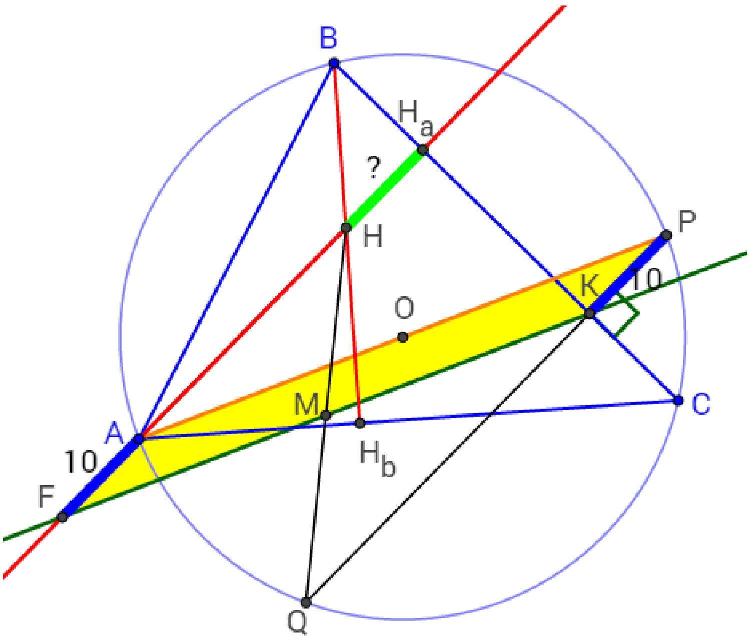


Задача 39: **Пусть AP - диаметр описанной окружности треугольника ABC. Через точку P провели прямую, перпендикулярную BC. Она пересекла BC в точке K, а описанную окружность данного треугольника - в точке Q. В треугольнике провели две высоты AH_a и BH_b, которые пересекаются в ортоцентре H. Пусть прямая, проходящая через середину отрезка QH и точку K, пересеклась с прямой AH_a в точке F. Найдите HH_a, если AF = 10.**

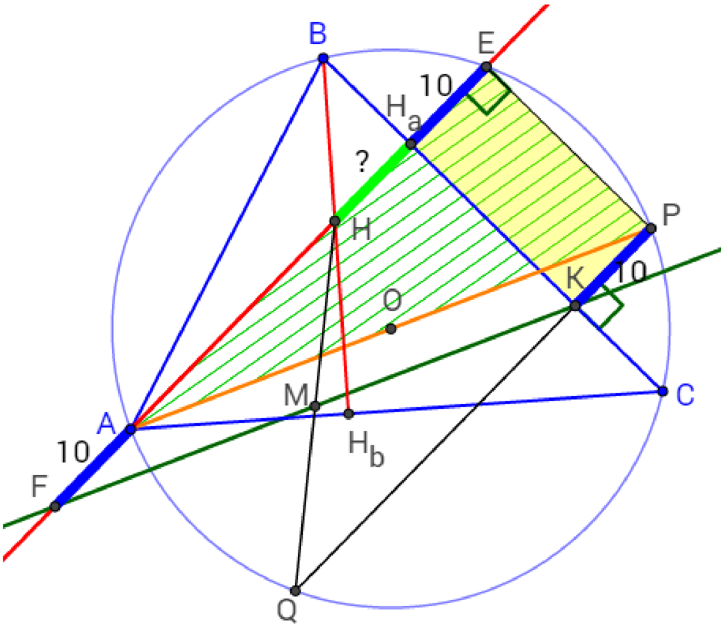
Решение:



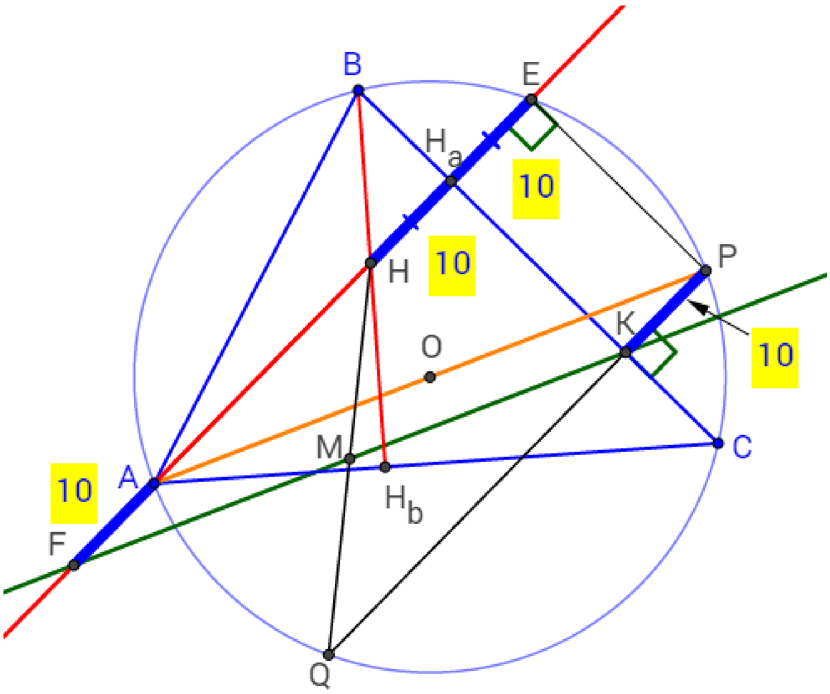
По признаку прямая MK – прямая Симсона. По свойству прямой Симсона она параллельна прямой AP. Следовательно, так как прямые FH_a и QK параллельны, то четырехугольник FAPK – параллелограмм. Значит, AF = PK = 10.



Продолжим AH_a до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке E. Заметим, что так как AP по условию является диаметром данной окружности, то $\angle AEP = 90°$. Тогда по признаку четырехугольник H_aEPK – прямоугольник. Значит, $H_aE = PK = 10$.



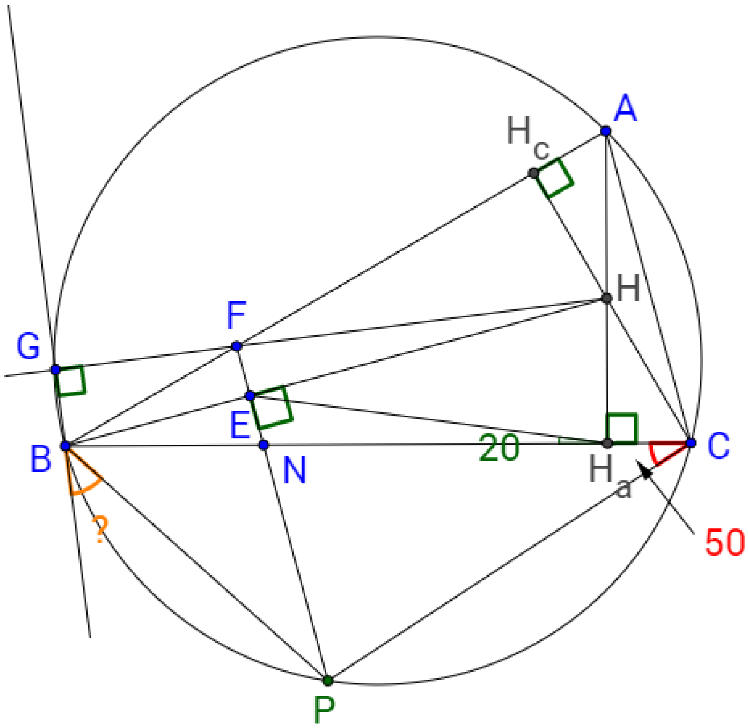
А так как по свойству ортоцентра $HH_a = H_aE$, то $HH_a = 10$.



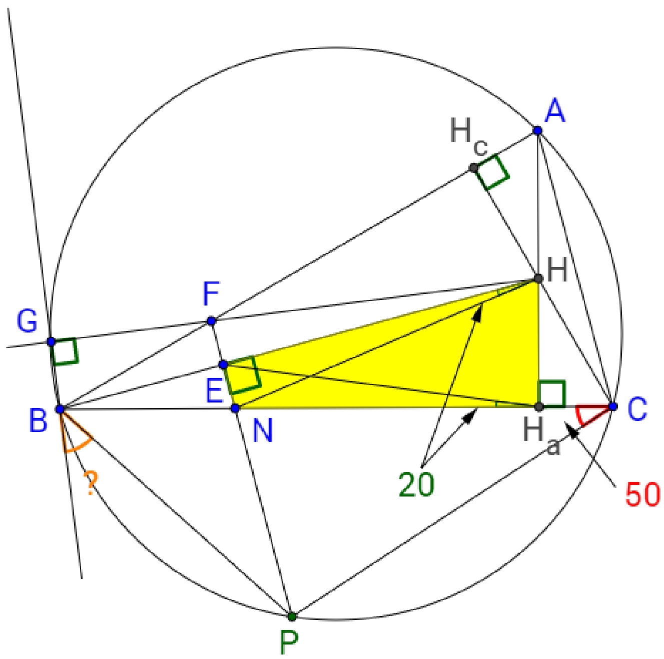
Ответ: 10.

Задача 40: **Дан равнобедренный треугольник ABC. P – произвольная точка его описанной окружности. Проведем высоты AH_a и CH_c. Пусть прямая, перпендикулярная BH, пересекает BC в точке N, BH – в точке E, AB – в точке F. Опустим перпендикуляр BG на HF. $\angle EH_aB = 20°$, $\angle PCB = 50°$. Найти $\angle$ (BG, BP).**

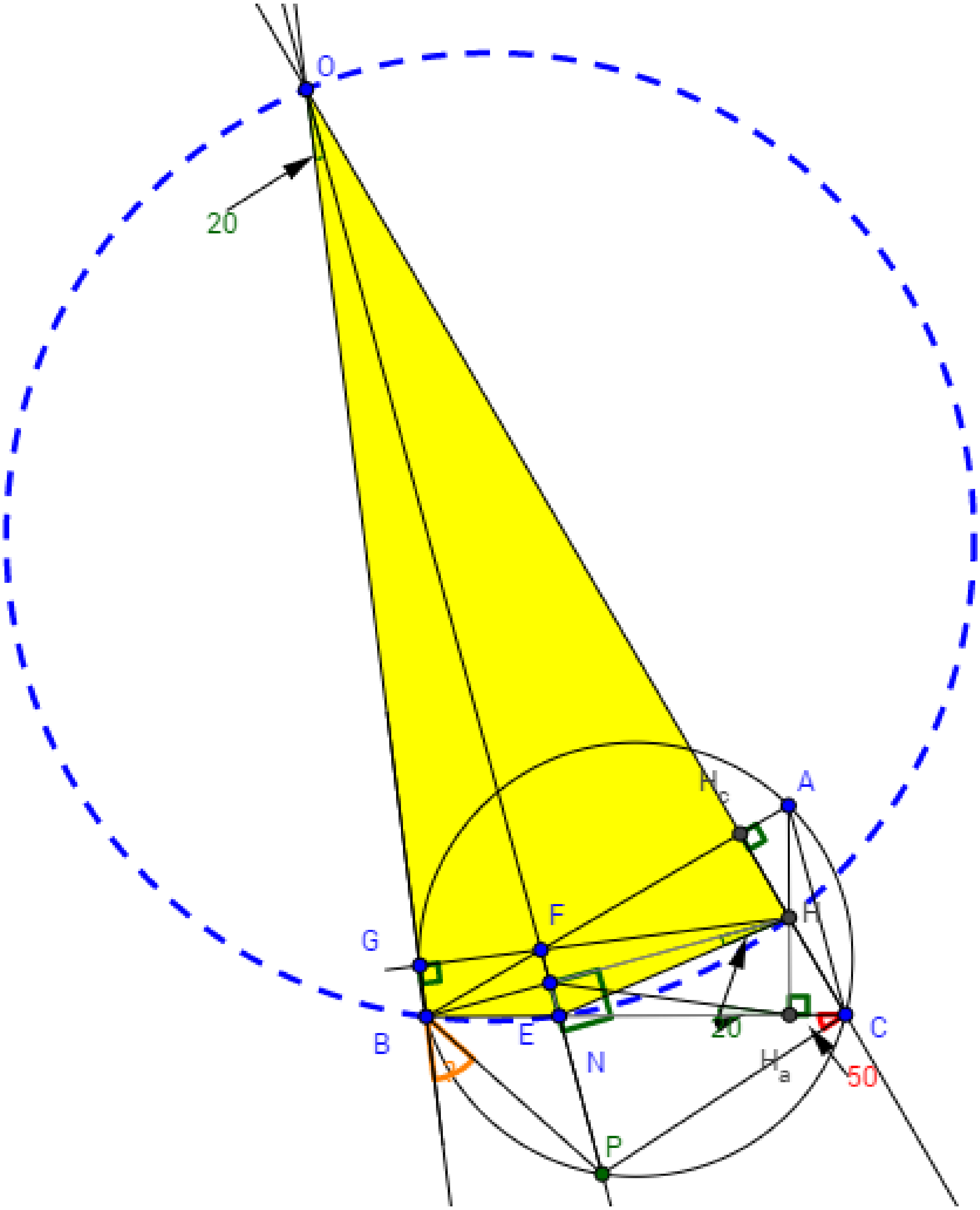
Доказательство:



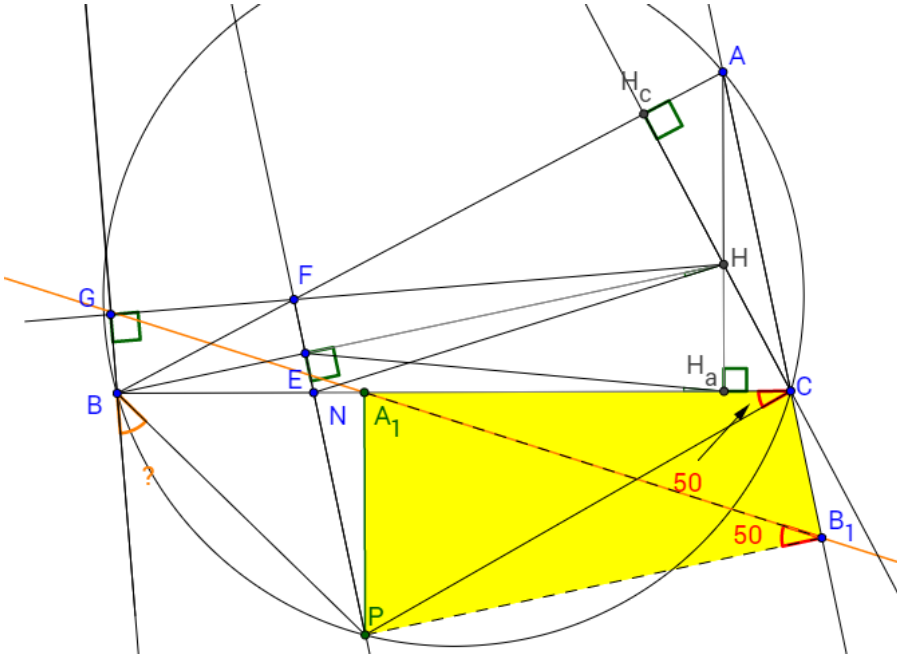
Заметим, что четырехугольник FHH_aN – вписанный. Тогда $\angle EHN = \angle EH_aN = 20°$:



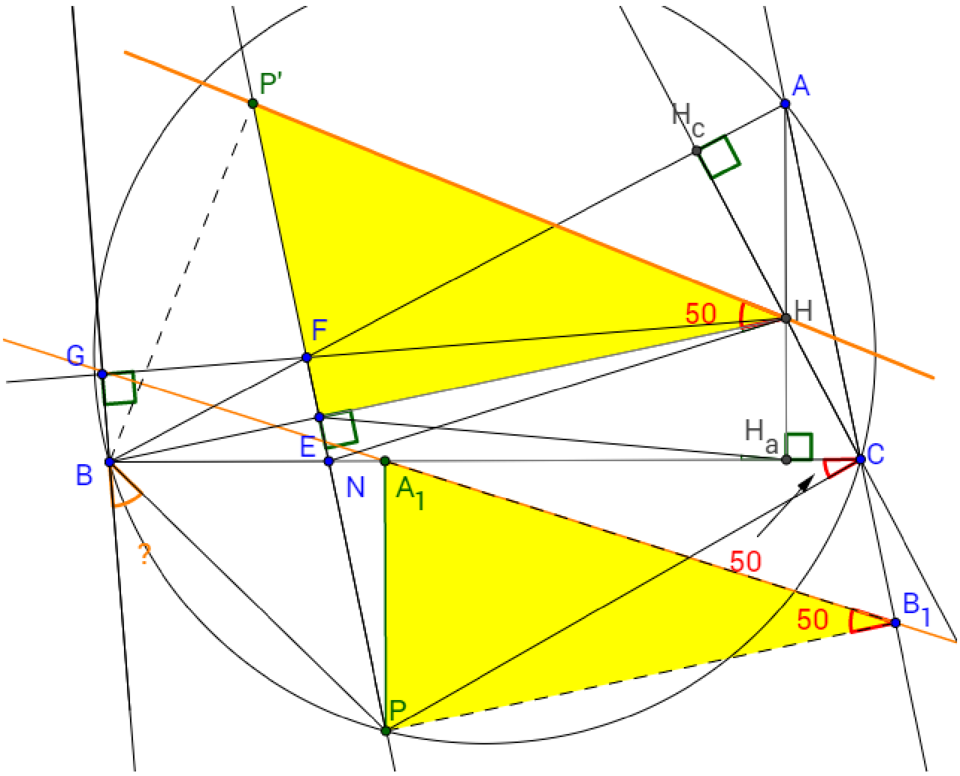
Заметим, что F – ортоцентр треугольника с вершинами в точках B, H и точке, образованной при пересечении прямых BG и HH_c. Пусть эти прямые пересекаются в точке O, тогда посмотрим на четырехугольник OHNB. Так как наш треугольник ABC равнобедренный, то FE = EN. Следовательно, по свойству ортоцентра точка N принадлежит описанной окружности около треугольника BOH. Тогда четырехугольник OHNB – вписанный, значит, ∠ BON = ∠ BHN = 20°.



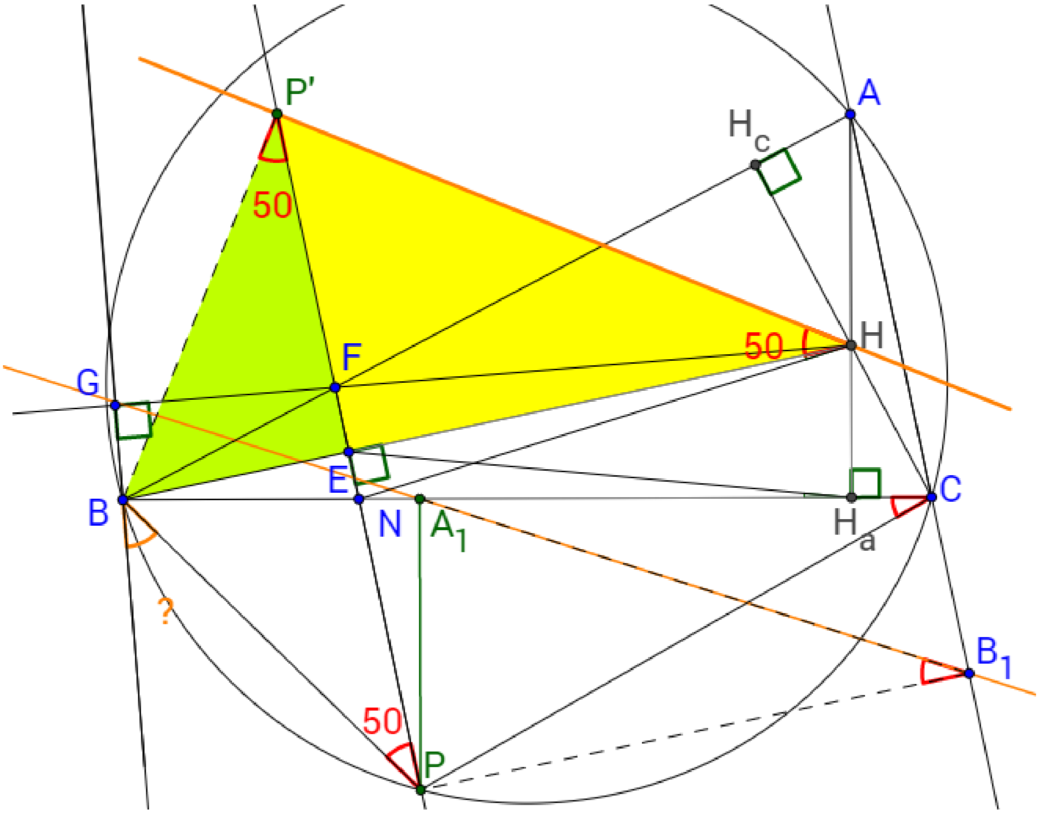
Опустим перпендикуляры PA_1 и PB_1 из точки P на прямые, содержащие стороны BC и AC соответственно. Тогда A_1B_1 – прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC. Четырехугольник A_1CB_1P – вписанный, поэтому $\angle A_1B_1P = \angle A_1CP = 50°$:

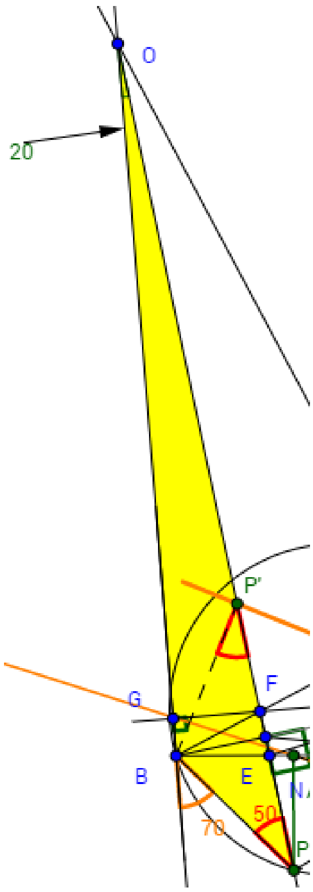


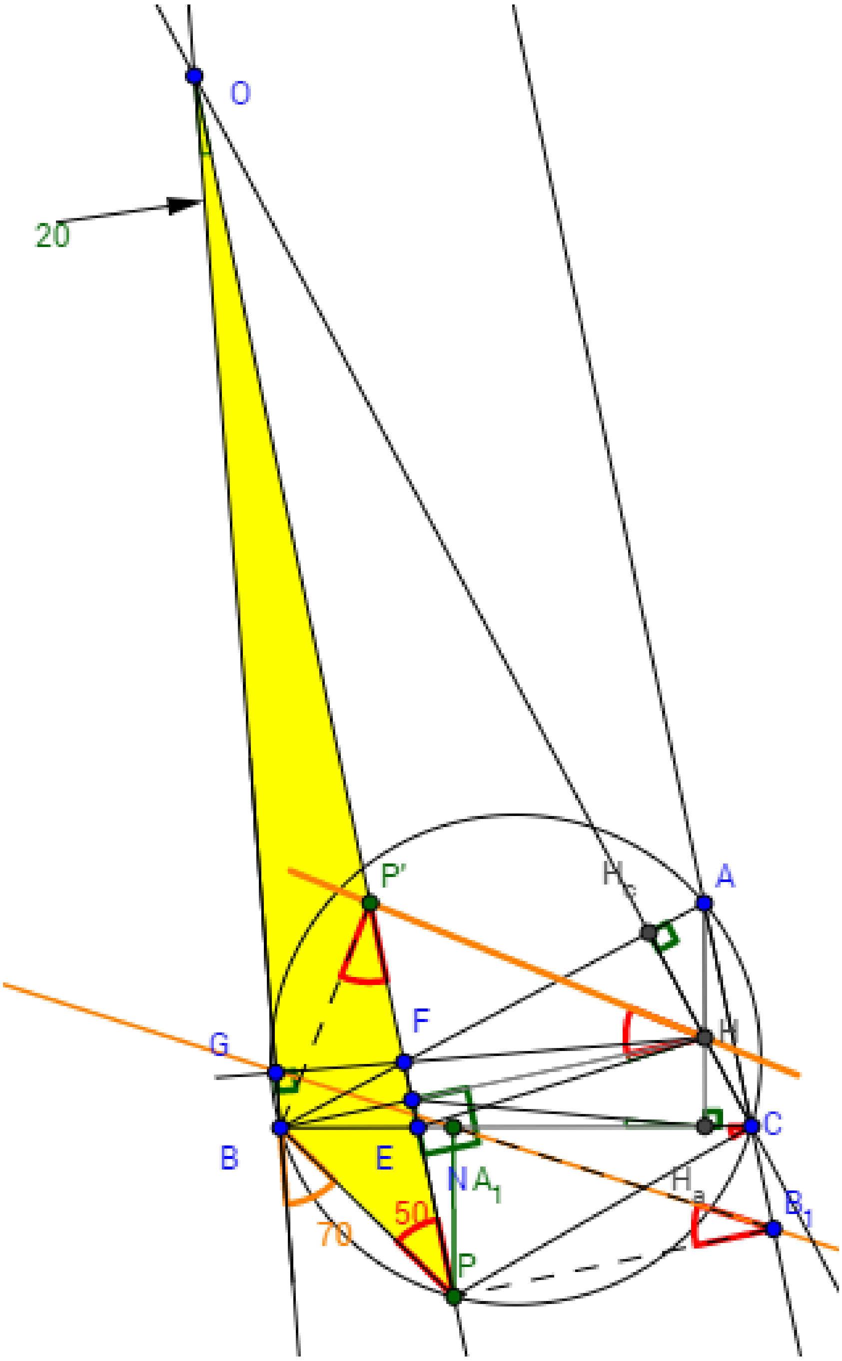
Пусть P' – точка, изогональная точке P относительно ∠ B треугольника ABC. Тогда, как было доказано в предыдущей главе, прямая HP' параллельна прямой Симсона точки P, то есть прямой A_1B_1. Заметим, что $BH \perp AC$, $PB_1 \perp AC$, следовательно, $BH \parallel PB_1$. Тогда $\angle P'HB = \angle A_1B_1P = 50°$ как углы с соответственно параллельными сторонами:



Также в третьей главе доказывается, что P’H ⊥ BP’, следовательно, ∠ BP’P = ∠ P’HB = 50° (из треугольника BP’H). Тогда ∠ BPP’ = 50°. Тогда можно найти ∠ (BG, BP) как внешний для треугольника OBP: ∠ (BG, BP) = ∠ BOP + ∠ BPO = 20° + 50° = 70°.







Ответ: 70°.

Заметим, что если обозначить 20° за α, 50° за β, то искомый угол будет α + β, так что данную задачу можно рассматривать как еще одно свойство вырожденного педального треугольника.

Доказать то, что ∠ BP’P = 50°, можно проще . Заметим, что BH – диаметр треугольника ABC, так как делит AC пополам и перпендикулярен AC (по свойству равнобедренного треугольника). Тогда из соображений симметрии точка P’ принадлежит описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, ∠ BP’P = ∠ BCP, значит, так как ∠ BP’P = ∠ BPP’, то ∠ BPP’ = 50°.

Заключение.

В данной работе изучены различные свойства педальных треугольников, прямой Симсона и точки Тебо.

В рассмотренных задачах показано практическое применение изученной теории для их решения. Всего представлено 40 задач, из которых 16 решены самостоятельно: 1, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 29, 30, 31; 3 задачи являются авторскими (задачи четвертой главы).

Некоторые из рассмотренных задач – это задачи олимпиадного уровня. Они были представлены на таких олимпиадах, как Московская математическая олимпиада, Всероссийская олимпиада по геометрии и Международная математическая олимпиада.

Список использованной литературы:

1. В.В. Прасолов, Задачи по планиметрии, МЦНМО, 2006.

2. Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер, Новые встречи с геометрией.

3. problems.ru

4. Е.Д. Куланин, О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак Кея, 2006.

5. А.В. Акопян, Геометрия в картинках, 2011.