Точка двух велосипедистов в задачах

Прокопенко Е.

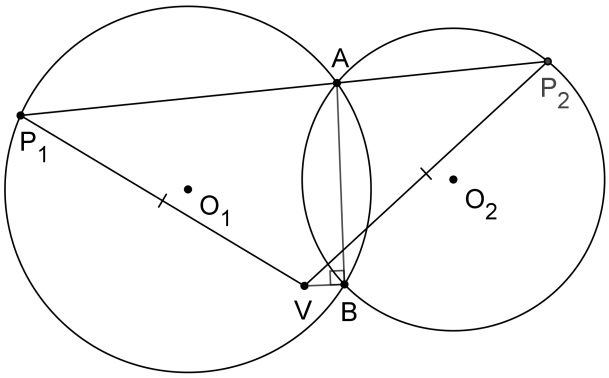
2017

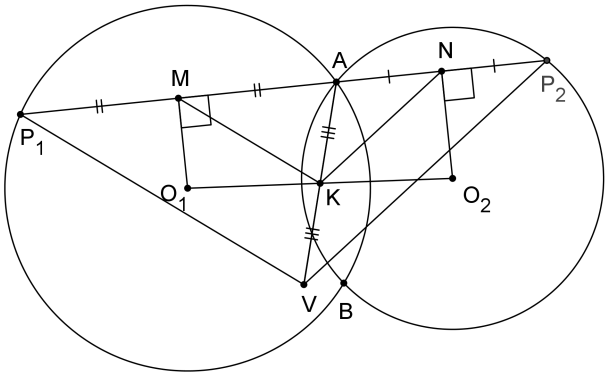
В статье В.Ю. Протасова [1] изучена конструкция из двух окружностей и секущей, проведенной через их точку пересечения. В данной работе показано как знание свойств этой конструкции помогает в поиске решений олимпиадных задач.

В статье [1] представлены доказательства нижеприведенных утерждений.

Основная теорема. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка V с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то V будет равноудалена от точек P_1 и P_2.

Эту точку будем называть в соответствии со статьей [1] **точкой двух велосипедистов**. Точки P_1 и P_2 будем называть первым и вторым велосипедистами, каждый из которых едет по своей окружности.





Свойства точки V.

В обозначениях основной теоремы угол ABV — прямой.

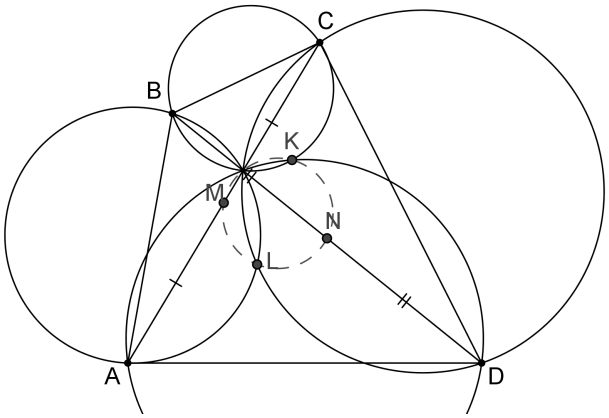
Заметим, что O_1VBO_2 — равнобокая трапеция, вырождающаяся в равнобедренный треугольник в случае равных окружностей. В следствие чего отрезки VB и O_1O_2 имеют общий серединный перпендикуляр.

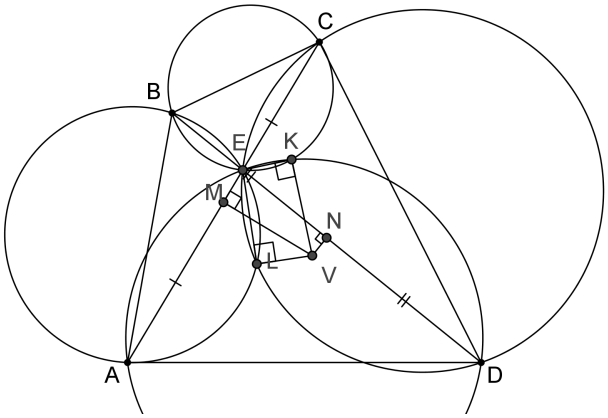
Также стоит отметить, что O_1VO_2A — параллелограмм.

В решении некоторых задач точка велосипедистов выступает как вспомогательная.

В следующей задаче рассмотрим свойство четырехугольника.

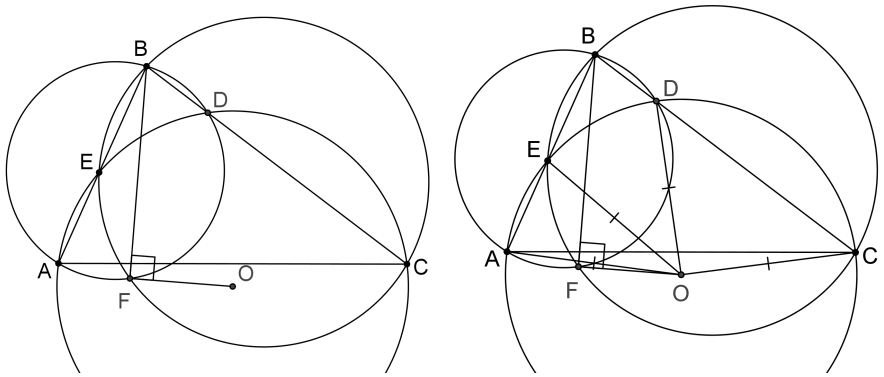
Задача 1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, точки M и N — их середины. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L, вторая и четвертая – в точке K. Доказать, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности. (Открытая олимпиада ФМЛ 239, 10-11 класс, №3, 2007 г.)





Решение. Пусть точка V — точка двух велосипедистов для окружностей $(BELA)$ и $(CELD)$, где парами велосипедистов являются B, D и A, C. Т.к. точка двух велосипедистов равноудалена от концов отрезков, то она лежит на серединном перпендикуляре к ним. Получается, что серединные перпендикуляры отрезков AC и BD пересекаются в точке V. Но пересекаются они в одной точке, следовательно, точкой двух велосипедистов для двух других окружностей, где велосипедисты — A, C и B, D, будет являться та же точка V. Проведем отрезки VM, VN, VL, VK. Тогда $VM \perp AC$ и $VN \perp BD$, т.к. треугольники AVC и BVD – равнобедренные, а M и N — середины оснований. $\angle ELV = \angle EKV = 90^\circ$ — по свойству точки двух велосипедистов. Значит, отрезок EV виден из точек M, L, N, K под углом 90°. Тогда эти шесть точек лежат на одной окружности.

Задача 2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой. (С. Берлов, Всероссийская олимпиада, 9 класс, №7, 1998/1999)



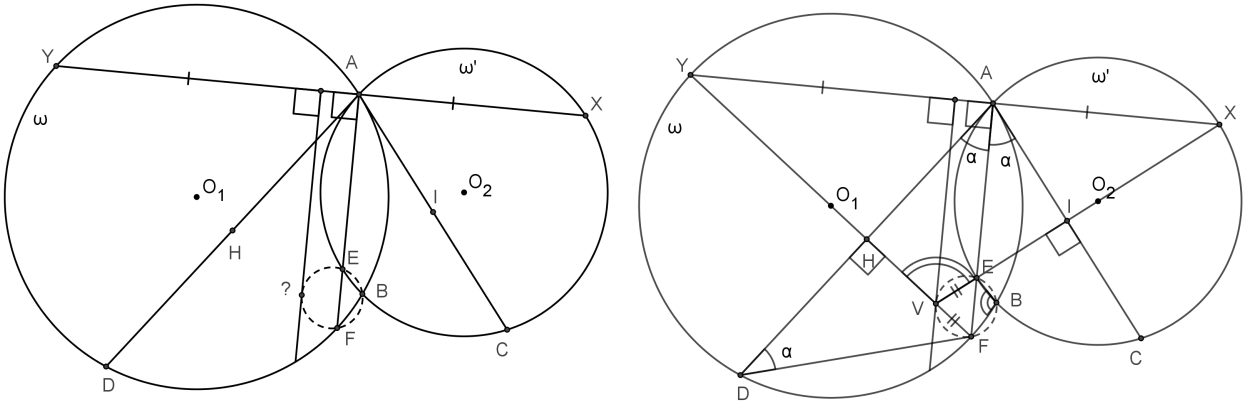
Решение.

Отрезки AO, OE, DO и OC будут равны как радиусы окружности $(AEDC)$. Значит, точка O будет равноудалена от точек A, E, D, C, а значит, она является точкой двух велосипедистов для окружностей $(AFDB)$ и $(BEFC)$, где велосипедистами будут A, E и D, C. Тогда по свойству точки двух велосипедистов $\angle BFO$ – прямой.

В задачах 3, 4 рассмотрим предельный случай секущей, когда один из велосипедистов доезжает до точки пересечения окружностей. Тогда эта секущая станет касательной к этой окружности.

Задача с Иранской олимпиады 2016 года, вариант Продолжающие (Intermediate).

Задача 3. Окружности и пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности в точке A пересекает в точке C; касательная к окружности в точке A пересекает в точке D. Биссектриса угла CAD пересекает и в точках E и F, соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает и в точках X и Y, соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF.



Заметим, что в условии есть серединный перпендикуляр к отрезку XY, а мы знаем, что он проходит через точку велосипедистов. Это наводит на мысль, что можно попробовать использовать эту точку как вспомогательную.

Решение.

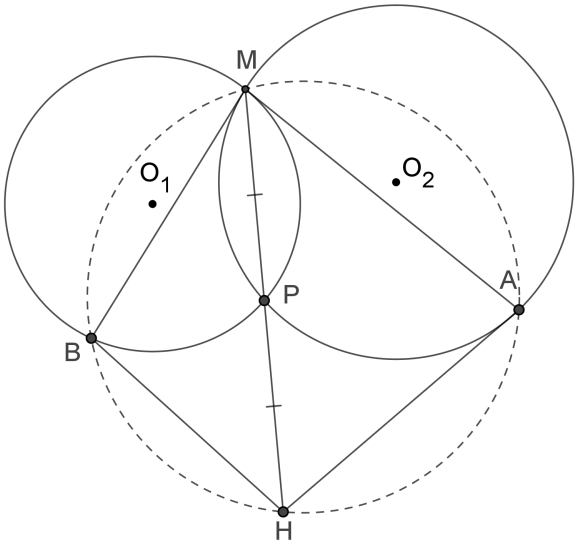
Если окружности равны, то точки E, F и V перейдут в точку B.

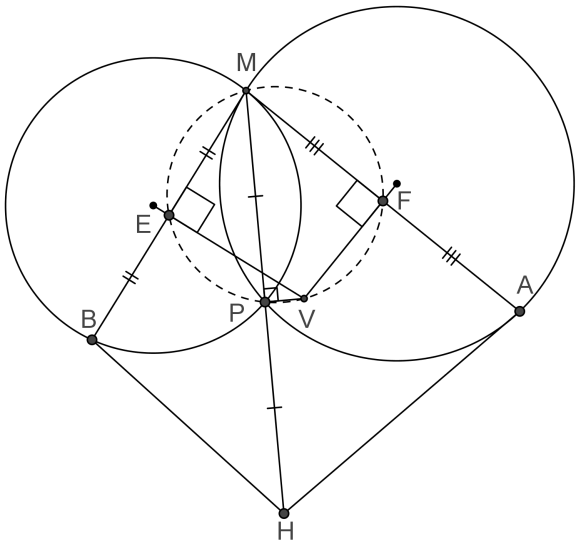
Отметим точку двух велосипедистов для велосипедистов X, Y; A, D; A, C и E, F. Она будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку XY. Значит, $VE = VF$. Тогда серединный перпендикуляр к XY будет являться касательной к описанной окружности треугольника VEF. Точки Y, O_1 , H, V, F и X, O_2 , I, E, V будут лежать на одной прямой, т.к. отрезки YF и XE — диаметры, точки H и I — середины хорд. Тогда четырехугольник $VHAI$ – вписанный по признаку. Значит, $\angle HVE = 180^\circ - 2\alpha$. Вспомним, что если через одну из точек пересечения проводить секущие, то треугольники, образованные точками пересечения секущих с окружностями и второй точкой пересечения, будут подобны треугольнику, образованному центрами окружностей и второй точкой пересечения. Следовательно, угол FBE равен углу O_1BO_2 , а тот, в свою очередь, равен углу O_1VO_2, т.к. — O_1VBO_2 равнобокая трапеция. Значит, угол FBE равен $180^\circ - 2\alpha$. Тогда по признаку $VFBE$ — вписанный четырехугольник, а серединный перпендикуляр к отрезку XY является касательной к описанной окружности этого четырехугольника.

В следующей задаче, помимо точки двух велосипедистов, используется следующий факт, доказанный в статье Ю.Блинкова [4]: в треугольнике ABC, где точка P лежит внутри треугольника, $\angle BAP = \angle PBC$, $\angle ABP = \angle BCP$. Тогда точка P лежит на симедиане.

Задача 4. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и P. Обозначим через MA хорду окружности S_1, касающуюся окружности S_2 в точке M, а через MB — хорду окружности S_2, касающуюся окружности S_1 в точке M.

На прямой MP отложен отрезок $PH = MP$. Доказать, что четырёхугольник $MAHB$ можно вписать в окружность. (ММО, 1962, 8 класс, №2, 2 тур)



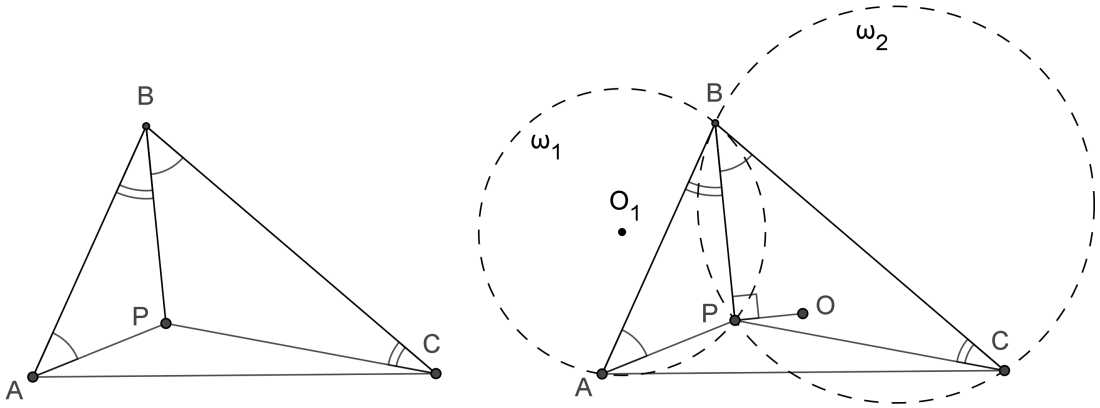


Решение. Пусть точка V — точка двух велосипедистов для окружностей S_1 и S_2 , где велосипедистами будут M, A и M, B. Т.к. точка двух велосипедистов равноудалена от концов отрезков, то она лежит на пересечении их серединных перпендикуляров. Пусть E и F — середины отрезков AM и BM. Тогда $\angle MEV = \angle MFV = 90^\circ$. По свойству точки двух велосипедистов $\angle MPV = 90^\circ$. Следовательно, по геометрическому месту точек, из которых отрезок виден под углом в 90°, точки M, E, P, V, F лежат на одной окружности. Применим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом 2. Тогда точка E перейдет в точку B, P – в точку H, F — в точку A. Значит, вписанный четырехугольник $MEPF$ перейдет в четырехугольник $MBHA$, который тоже будет вписанным, и его центром будет точка V.

Вспомним следующий факт, доказанный в статье Ю.Блинкова [4]: в треугольнике ABC, где

точка P лежит внутри треугольника, $\angle BAP = \angle PBC$, $\angle ABP = \angle BCP$. Тогда точка P лежит на симедиане.

Также можно заметить, что по свойству касательной пары углов MBP, PMA и MAP, PMB будут равны между собой. Следовательно, по признаку PM будет являться симедианой для треугольника ABM. Тогда точка P является проекцией центра V описанной окружности треугльника ABM на симедиану.



Из статьи Ю.Блинкова [4] мы знаем, что BP содержит симедиану. Переформулируем предыдущую задачу. Дан треугольник ABC. Точка P — проекция точки O на симедиану. Тогда точка O является точкой двух велосипедистов для окружностей ω_1 и ω_2, которые проходят через точку B и касаются соответственно сторон BC и BA.

Список литературы

[1] В. Протасов, О двух велосипедистах и вишневой косточке, Квант, 2008 г. №3

[2] Акопян А. Геометрия в картинках. — М., 2011.

[3] Заславский А.А., Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2010-2014.

[4] Ю.Блинков, Симедиана, Квант, 2015 г., №4

[5] geometry.ru, Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина.