Неравенства о средних, или неравенства Коши.

Неравенства о средних гласят :

$$min\{x_1, \ldots, x_n\} \le \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

$$\le max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

где все члены неотрицательны.

Т.е. Минимальное среди данного ряда из n чисел меньше или равно, чем среднее гармоническое . Среднее гармоническое меньше или равно среднему геометрическому.Среднее геометрическое меньше или равно среднему арифметическому. Среднее арифметическое меньше или равно среднему квадратичному и среднее квадратичное меньше или равно наибольшему из данного ряда чисел .

Разберем случай для двух чисел (n=2)

1) $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

Левая часть неравенства - среднее геометрическое, правая - среднее арифметическое
Пусть ($x_1 = x, x_2 = y$)

$$\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x + y}{2}$$

число k >m если k-m>0 ,

Тогда $\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} \ge 0$ Умножим каждую часть на 2 .

Получу: $x + y - 2\sqrt{xy} \ge 0$ и $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \ge 0$

Но так как последнее выражение это квадрат какого-либо числа , то отсюда вытекает истинность равенства .
Значит данное выражение для n=2 мы доказали .

2) Среднее гармоническое чисел :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

Запишем неравенство которое следует доказать.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Докажем для n=2

Получу неравенство в виде :

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \le \sqrt{x_1\cdot x_2}$$

Решаем его :

$$\frac{2}{\left(\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}\right)} \le \sqrt{x_1\cdot x_2}$$

$$2 \le \left(\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}\right)\sqrt{x_1\cdot x_2}$$

$$2 \le \frac{x_2+x_1}{\sqrt{x_1\cdot x_2}}$$

$$2\sqrt{x_1\cdot x_2} \le x_2+x_1$$

$$0 \le x_1-2\sqrt{x_1\cdot x_2}+x_2$$

И в итоге получим неравенство :

$0 \le (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2$ а это верно для любых x.

3) $$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

У данного неравенства в левой части среднее арифметическое , а в правой среднее квадратичное.

Докажем для n=2

Тогда при n =2 неравенство принимает вид : $\frac{x_1+x_2}{2} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$

Упрощаем его : (мы можем возвести обе части во 2-ю степень,так как они неотрицательны)

$$\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} \le \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$$

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \le 2x_1^2+2x_2^2$$

$$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \ge 0$$

$$\left(x_1-x_2\right)^2 \ge 0$$

что верно при всех x .

Случай для произвольного количества n

Средним арифметическим чисел $x_1,\ldots,x_n$ *называется число* :

$$A\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{x_1,\ldots,x_n}{n}$$

Если $x_{(1)}=min\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ - наименьшее из чисел ,а $x_{(n)}=max\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ - наибольшее из чисел , то для любого k=1,...,n верно неравенство $x_{(1)} \le x_k \le x_{(n)}$

Складывая эти n неравенств , мы получим :

$$nx_{(1)} \le x_1+\ldots+x_n \le nx_{(n)} \Leftrightarrow x_{(1)} \le A\left(x_1,\ldots,x_n\right) \le x_{(n)}$$

А значит среднее арифметическое n чисел лежит между самыми маленькими и самыми большими из них.

Далее используются обозначения :

$A\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *– среднее арифметическое*

$H\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *– среднее гарминическое*

$G\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *– среднее геометрическое*

$K\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *– среднее квадратичное*

1) Докажем , что $G\left(x_1,\ldots,x_n\right) \le A\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, причём равенство достигается , только при равенстве всех членов .

Докажу для n=4. Имеем:

$$A\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+}{2}\frac{\frac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

Из этого равенства вытекает , что среднее арифметическое 4 чисел можно рассматривать ,как среднее арифметическое 2-х чисел : среднего арифметического :x1 и x2, и среднего арифметического x3 и x4.

А значит истинно и $A\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \geq \dfrac{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_3 + x_4}}{2}$

(справа среднее арифметическое двух чисел)

Получаем :

$$A\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \geq \sqrt{\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot \sqrt{x_3 \cdot x_4}} = \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4} = G\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$$

Что и требовалось доказать

При равенстве :

$$A\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = G\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$$

Все 4 числа равны , те $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

А значит если неравенство справедливо для n=k , то оно и справедливо для n=2k.

Значит данное неравенство справедливо для степени двойки .

Докажем , что если n является степенью двойки , то искомое неравенство верно .

<u>Доказательство</u>

Пусть n - степень двойки

Если истинно m , докажу для m+1.

$$\frac{x_3 + x_2 + \ldots + x_{2^n}}{2^m} \geq \sqrt[2m]{x_1 x_2 \ldots x_{2^m}}$$

Докажу для m+1

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geq \sqrt[2^{m+1}]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^{m+1}}}$$

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} = \frac{x_1 + \ldots + x_{2^m}}{2^{m+1}} + \frac{x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geq \frac{\sqrt[2^m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^m}}}{2} +$$

$$+ \frac{\sqrt[2^m]{x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[2^m]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^m}} \cdot \sqrt[2^m]{x_{2^m+1} \cdot \ldots \cdot x_{2^{m+1}}}} =$$

$$= \sqrt[2^{m+1}]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^{m+1}}}$$

$$S_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + s_n}{n+1}\right)^{n+1} \ge x_1 \cdot \cdots \cdot x_n s_n$$

$\dfrac{x_1 + \ldots + x_n + s_n}{n+1} = s_n$ а из этого равенства следует , что :

$s_n^{n+1} \ge x_1 \cdot \ldots \cdot x_n S_n \Rightarrow : S_n$ без остатка

а значит для любого n являющегося степенью двойки выполняется искомое неравенство .

Продолжим доказательство , для всех n .

Докажим , что при n=3 данное неравенство истинно .

Для этого , в неравенстве для n = 4 заменю x4 на $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$

Получим неравенство :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}{4} \ge \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{x_1 x_2 x_3} \ge 4 \cdot \sqrt[4]{\left(x_1 x_2 x_3\right)^{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \ge 4 \cdot \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 3\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ge \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

А значит , мы доказали неравенство для n=3 и равенство достигается только при равенстве каждого из членов .

2) $H\left(x_1, \ldots, x_n\right) \ge G\left(x_1, \ldots, x_n\right)$

Причём равенство достигается только при равенстве каждого из членов .

<u>**Доказательство**</u>

Так как $G\left(\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{G\left(x_1, \ldots, x_n\right)}$

А это аналогично среднему арифметическому и среднему геометрическому для чисел

$\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$

А значит неравенство верно для всех n

3)

$A\left(x_1, \ldots, x_n\right) \le K\left(x_1, \ldots, x_n\right)$

причем выполняется равенстово только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Доказательство. Обозначим $A\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ за A , тогда рассмотрим выражение

$X = (x_1 - A)^2 + \ldots + \left(x_n - A\right)^2$

Оно неотрицательно . Раскрывая скобки и приводя подобные , запишим его в виде :

$X = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 2A\left(x_1 + \ldots + x_n\right) + nA^2$

Так как $x_1 + \ldots + x_n = nA$, то и $X = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - nA^2$

А так как X неотрицательно , то отсюда следует верность

$A\left(x_1, \ldots, x_n\right) \le K\left(x_1, \ldots, x_n\right)$

Равенство выполняется тогда , когда X=0 , а значит и $x_1 - A$, … , $x_n - A$

Значит $x_1 = \ldots = x_n$.

А значит данные неравенства выполняются при любых n и неотрицательных членах .