Разрезание перекрученных лент (в свете основ топологии)

1.О чем этот текст?

Представьте себе любой предмет - тетрадь, ручку, чашку, пружину. И представьте, что вы его согнули, скрутили, сложили пополам, разрезали - все это довольно легко понять, описать или, например, зарисовать. А теперь попробуйте провести подобный мысленный эксперимент с лентой Мёбиуса или, еще интереснее, два, три, пять раз перекрученной лентой. Уже не так очевидно?

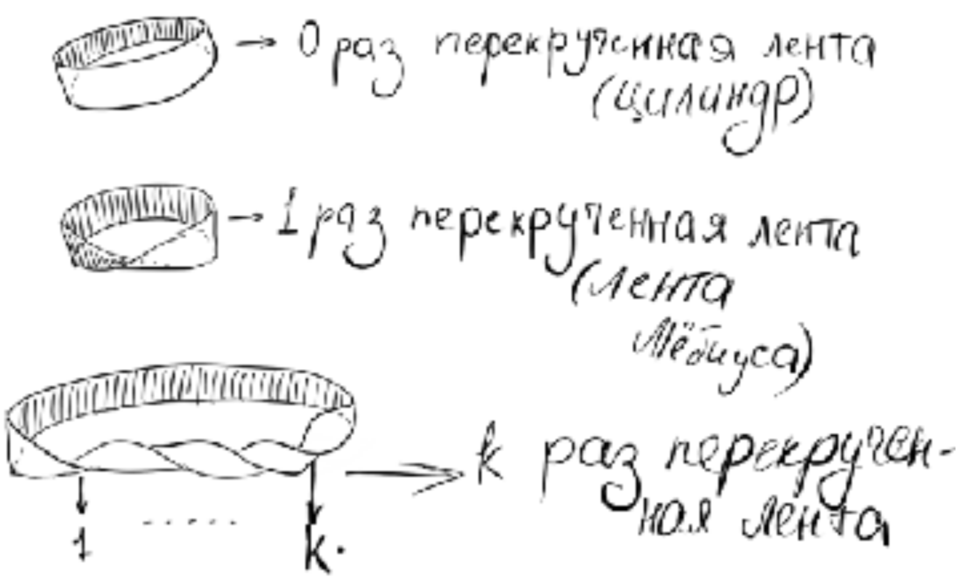
Цель этого проекта - описать поведение перекрученных лент при разрезании, проанализировать его, попытаться выделить единый алгоритм и предсказать результат произвольного разрезания для лент, заданных произвольными параметрами.

Эти данные могут быть полезны в совершенно различных ситуациях, ведь часто необходимо понимать и учитывать поведение объекта, с которым человек имеет дело. А с лентами люди часто работают, даже не задумываясь об этом - ДНК, например, которая часто бывает рассмотрена в весьма упрощенном виде последовательности кодовых названий нуклеотидов.

2.К раз перекрученная лента

Простое бумажное кольцо или цилиндр- ноль раз перекрученная лента. Лента Мёбиуса - лента, перекрученная один раз.

Определение.
Возьмем прямоугольник с неравными сторонами. Зафиксируем положение одной из коротких сторон. Теперь повернем противоположную сторону на 180 градусов k раз и склеим с первой стороной. Полученный объект - это К раз перекрученная лента. Далее в тексте «к-лента» = «К раз перекрученная лента»



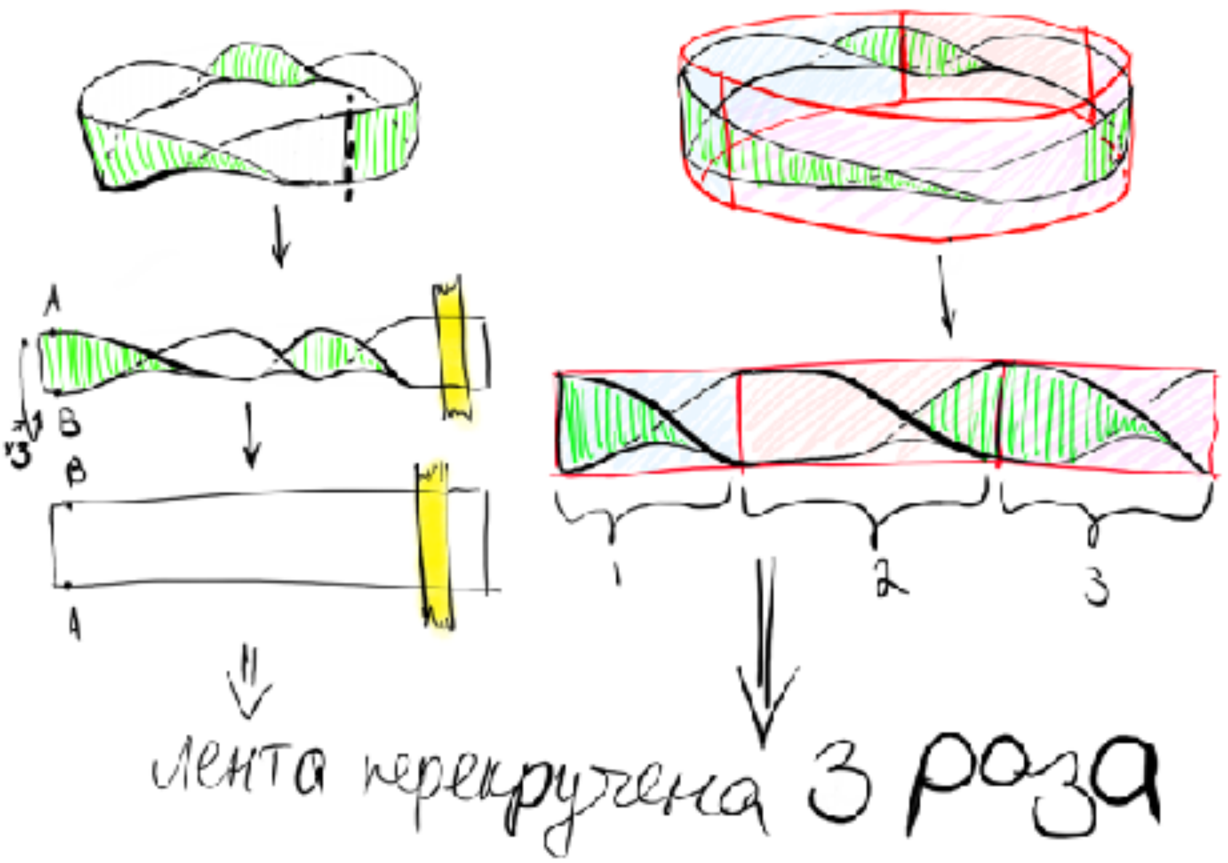
Рассматривая ленту, мы будем часто иметь дело не с самой лентой, а её упрощенной моделью, разверткой.

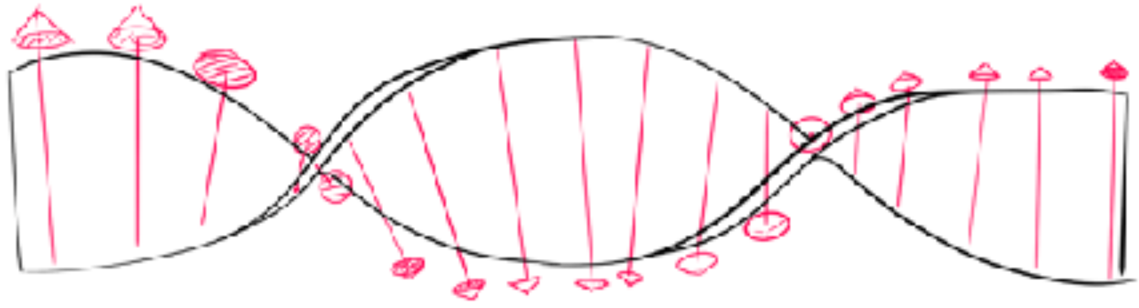
Развертка – объект на плоскости, полученный путем преобразования трехмерного объекта, устанавливающего соответствие между трехмерными координатами исходного объекта и двухмерными развертки.

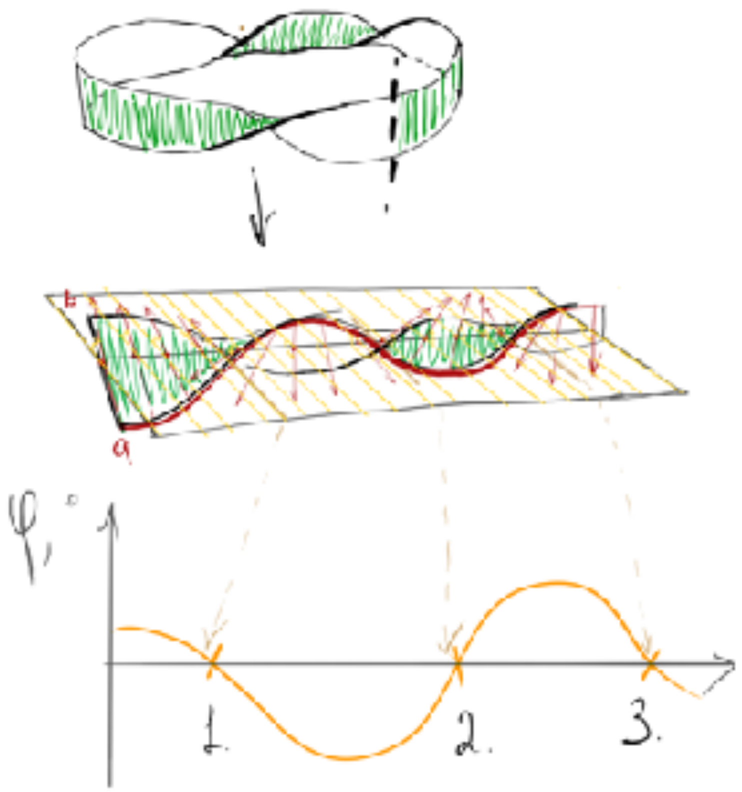
В случае с к-лентами развертка является прямоугольником, из которого была склеена лента. Этот прямоугольник не задан единственным образом.

Как посчитать число перекрутов к-ленты? Если речь идет о материальном объекте, находящемся прямо в наших руках, то проще и надежнее всего будет разрезать ленту поперек в любом месте, аккуратно держа её за образовавшиеся концы, прикрепить один из них к неподвижному объекту (например, к столу) и, вращая другой конец, считать число переворотов (поворотов на 180 градусов), нужных, чтобы лента превратилась в простой ровный прямоугольник без перекрутов, совпадающий с разверткой.

Механизм весьма ясен, прост и интуитивно понятен. Сложнее ситуация, когда лента находится в воображении. Однако, и тогда можно описать её, например, разбив ленту в уме на несколько частей, число и направление перекрутов на





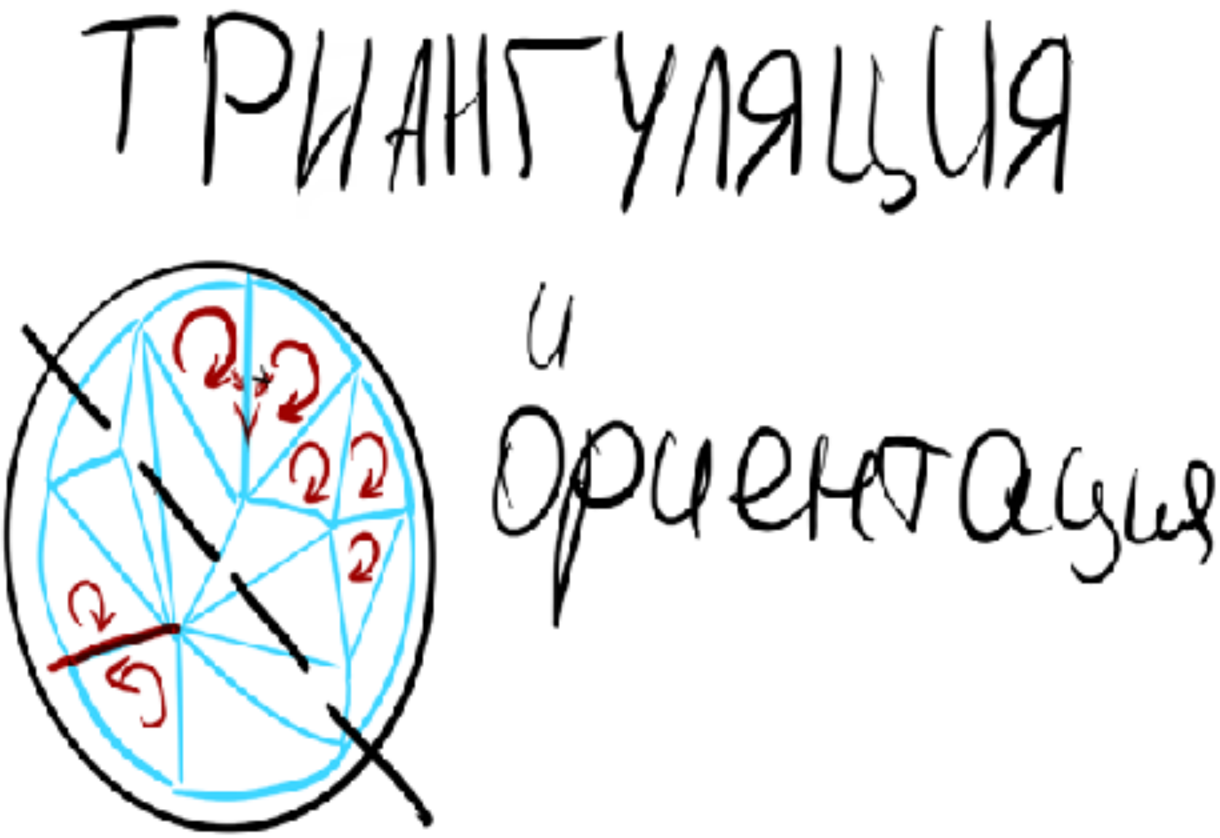


каждой из которых нам известно. Удобно делить на куски с одним перекрутом. При этом развертка делится на равные прямоугольники.

Также саму ленту и число её перекрутов мы можем описать совсем иначе. Разрежем ленту поперек в произвольном месте. Не изменяя числа перекрутов, зафиксируем её в пространстве так, что середины каждого поперечного сечения образуют прямую – ось ленты (см. рисунок выше). Рассмотрим семейство векторов, каждый из которых направлен перпендикулярно краю, соответствующему данной длинной стороне развертки, к противоположному краю поперек ленты. Рассмотрим углы между векторами и заданной плоскостью, содержащей ось к-ленты. Напомним, что углом между прямой и плоскостью называется наименьший из плоских углов, образованных при их пересечении, и принимает значение от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (в радианах). При построении графика зависимости такого угла от координаты по оси ленты, число пересечений такого графика с осью 0X будет равно числу перекрутов.

В этом случае лента представлена нами как процесс поворота вектора вокруг некоторой оси при поступательном его движении вдоль этой оси, похожий на процесс «рисования» геликоида.

Число перекрутов также поможет определить другое важное глобальное топологическое свойство такой ленты – её ориентируемость. Для этого используем триангуляцию.



3. Триангуляция и ориентация

Определение:
Триангуляция трехмерной поверхности – это разбиение её на конечное число треугольников, каждые два из которых граничат либо по одному полному ребру, либо по одной вершине, либо вообще не пересекаются.

Определение:
Измельчение триангуляции – это подразбиение ее на более мелкие части, в результате которого получается корректная триангуляция. При этом объединение ребер измельчения содержит все ребра исходной триангуляции.

Утверждение:

Для любых двух триангуляций существует общее измельчение.

Доказательство:
Рассмотрим любые две триангуляции поверхности. Наложим их друг на друга (нарисуем поверх). В результате поверхность будет разделена на конечное число многоугольников. Те из них, которые не являются треугольниками, разделим на треугольники диагоналями. Полученная триангуляция является корректной и содержит в себе обе исходные.

Возможность ориентировать треугольники в триангуляции - свойство, сохраняющееся при измельчении триангуляции (делении треугольников на более мелкие), а значит обе исходные триангуляции обладали тем же свойством, что и полученная, значит были эквивалентны друг другу.

Следствие: чтобы сделать вывод, достаточно рассмотреть одну произвольную триангуляцию

Ориентируем триангуляцию.
Определение:
Ориентацией треугольника называется упорядочивание его вершин.Таким образом для любого треугольника есть всего лишь две ориентации. Неформально это направления по и против часовой стрелки. Поэтому ориентацию треугольника можно рисовать как круговую стрелку.

Определение:
Ориентация отрезка - это упорядочивание его концов. Таких ориентаций всего две. Их можно обозначать стрелочкой вдоль отрезка.

Ориентация треугольника однозначно задает ориентацию трех его сторон: от первой вершины ко второй, от второй к третьей и т. д. С другой стороны ориентация одной из сторон однозначно задает ориентацию треугольника. Порядок вершин треугольника должен быть таким, что первая из вершин стороны идет перед второй.

Для двух соседних по ребру треугольников существует два способа их ориентировать. Первый - когда ориентация на общем ребре совпадает. Такой способ не позволяет ориентировать даже один треугольник, подразбитый барицентрически (добавим точку в центр и соединим с вершинами. см. рисунок ниже). Этот способ называется несогласованной ориентацией. Второй способ - когда ориентация на общем ребре разная. Такой способ называется согласованной ориентацией.

Утверждение:
Согласованную ориентацию можно продолжать на измельчении.

Доказательство:
При измельчении каждый треугольник стал подразбит на более мелкие. Ребра треугольника стали подразбиты тоже. Зададим сначала ориентацию на подразбитых ребрах так же, как и на целом ребре. После этого ориентируем все

получившиеся треугольники, в которых есть хотя бы одно ориентированное ребро. Конфликтов ориентации не возникнет. Продолжим ориентировать треугольники, в которых появилось ориентированное ребро на первом шаге. Будем продолжать процесс до тех пор, пока не исчерпаем все треугольники подразбиения. Неформально говоря, стрелка во всех треугольниках разбиения будет направлена в ту же сторону, что и в исходном.

Определение:
Продолжением ориентации треугольника назовем задание согласованной ориентации на соседних с ним треугольниках.

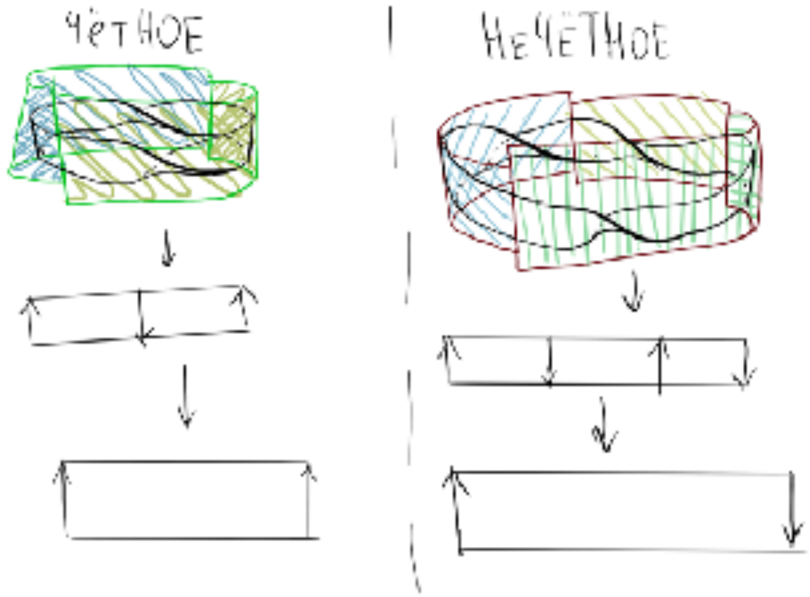
Утверждение:
Если ориентация задана хотя бы на одном треугольнике подразбиения, то её можно продолжить на все треугольники подразбиения так, чтобы ориентация была согласована. Это задаст ориентацию на более крупной триангуляции.

Определение:
Поверхность ориентируема, если на ней существует триангуляция, согласованная глобально.

Замечание: Определение не зависит от конкретной триангуляции. Возымеем две триангуляции на поверхности. Ранее мы доказали, что существует их общее измельчение. Также мы доказали, что ориентацию можно продолжить на измельчение и поднять к исходной. Таким образом, если одна из триангуляций ориентируема, то ориентируема и любая другая. И наоборот, если на поверхности есть неориентируемая триангуляция, то и все остальные триангуляции будут такими же.

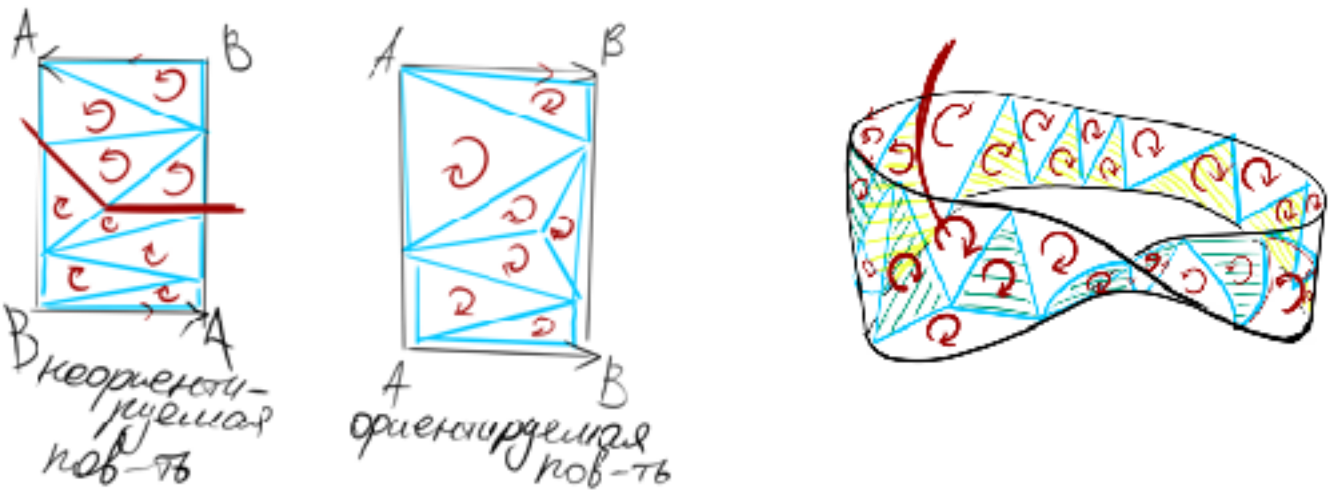
Утверждение: четное число перекрутов ленты – достаточное и необходимое условие для того чтобы утверждать, что она ориентируема. Говоря другим языком, на ней можно задать семейство одинаково ориентированных систем координат, в нашем случае представленных направлениями «по» и «против» часовой стрелки на каждой развертке.

Для доказательства просто рассмотрим одну развертку такой ленты. Разобьем её на участки, содержащие по одному перекруту, каждый из них представляет из себя несклеенную (но уже перевернутую) ленту Мёбиуса (если наша лента перекручена ноль раз, то это простое бумажное кольцо – цилиндр, его мы позже рассмотрим отдельно)

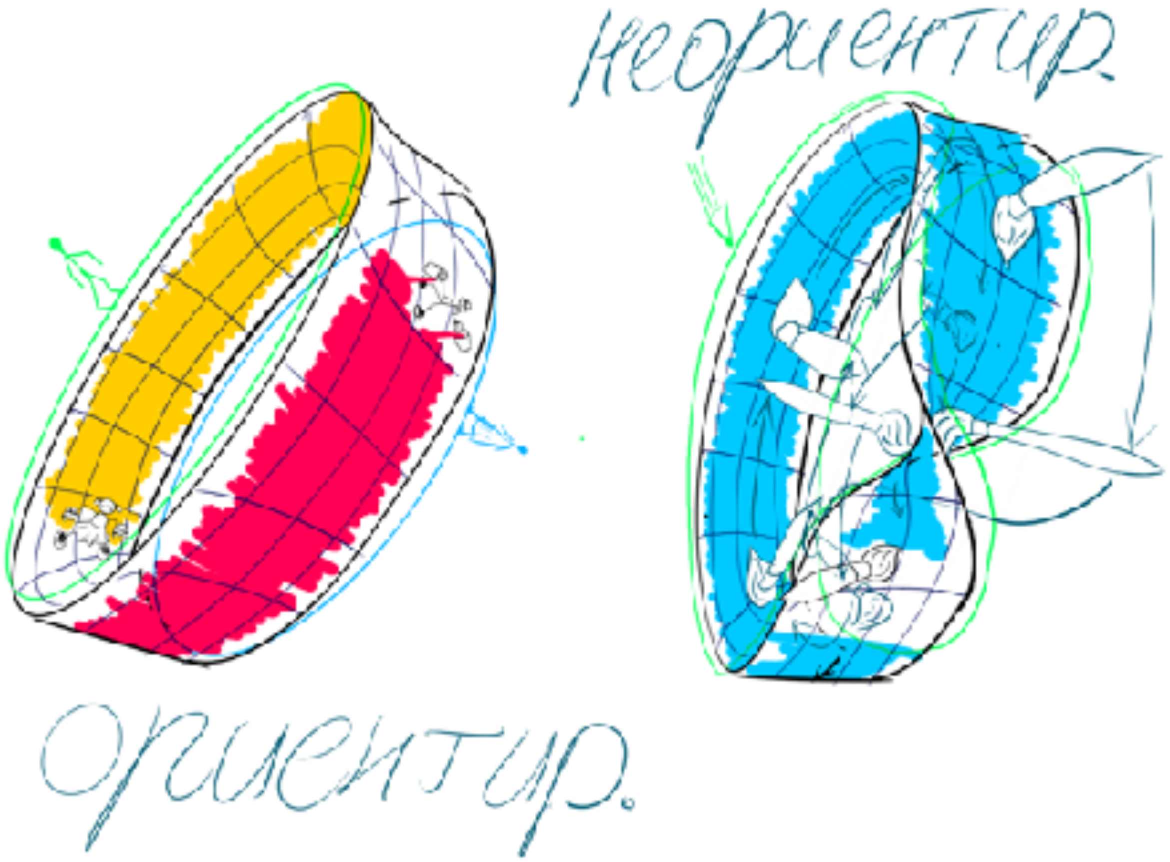


На левом рисунке выше показано такое разбиение и развертка четное число раз перекрученной ленты, на правом рисунке - нечетное число раз перекрученной ленты. Заметим, что развертка 2n-ленты идентична разверстке цилиндра, а значит далее его можно рассматривать наряду с остальными 2n-лентами.

Каждую из этих разверток попробуем триангулировать (разбить на треугольники, как это описано выше) и ориентировать. Для ленты Мёбиуса это невозможно, зато возможно для цилиндра. Что и требовалось доказать.



Ориентируемость объекта однозначно определяет многие важные его свойства, например: глобальное число сторон и число компонент границ. У нечетное число раз перекрученной ленты (неориентируемой) сторона всего одна - если житель планеты в форме такой ленты начнет красить землю под своими ногами, то рано или поздно он, не отрывая кисти, сможет закрасить всю поверхность (тогда можно утверждать, что для жителя его планета ничем топологически не отличается от ленты Мёбиуса). У такой ленты одна компонента края (это можно легко отследить по развертке). Для ориентируемой же ленты нам понадобится два жителя, чтобы её покрасить, которые вынуждены никак не встречаться друг с



другом, если на планете, конечно нет самолетов или ракет. Такая лента для ходящих по ней созданий ничем не отлична от цилиндра

С точки зрения жителя планеты определенной формы очень легко оценить многие её локальные свойства, например, кривизну или размерность. Однако в этой работе описаны объекты только одной размерности, размерности 2, а понятие кривизны сугубо геометрическое, не топологическое. Поэтому я не стану подробно на нем останавливаться в этой работе.

Еще одно важное и напрямую следующее из ориентируемости свойство поверхности - эйлерова характеристика.

Определение:
Эйлерова характеристика поверхности - это В - Р + Г, где В - число вершин, Р - число ребер, Г - число граней любой триангуляции.

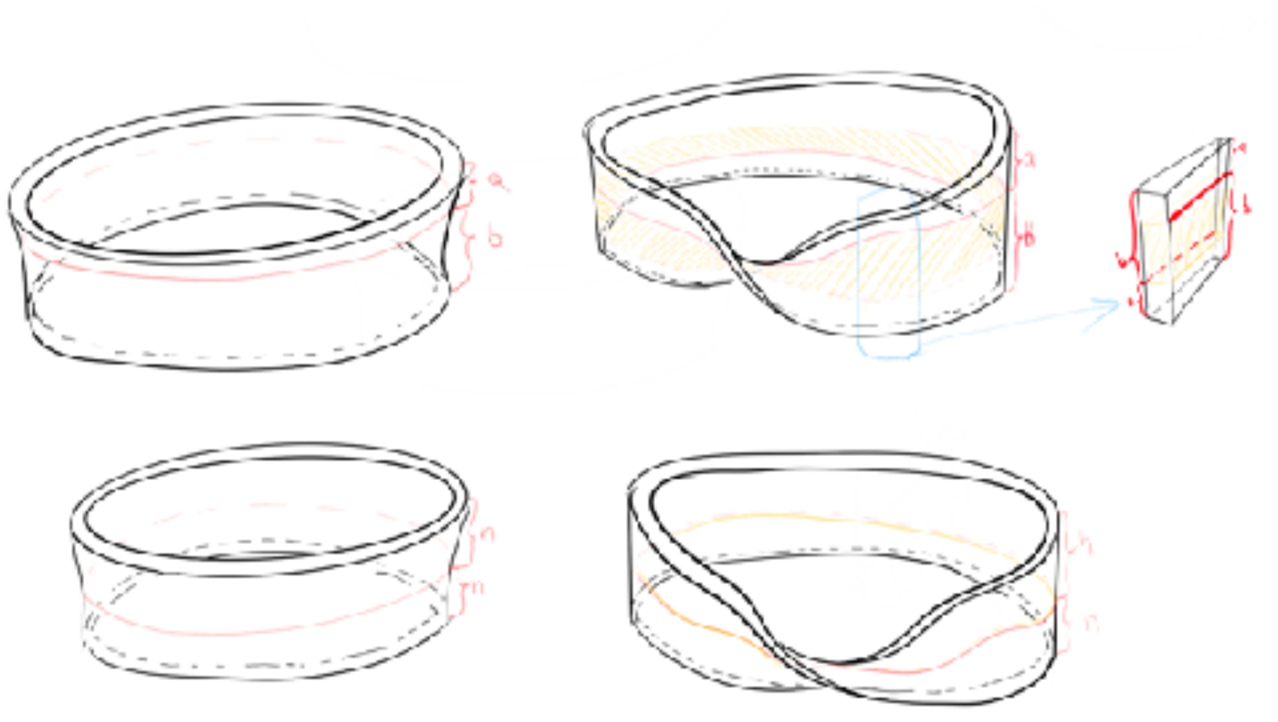
У сферы, плоскости (со внешней гранью) она равна двум, у проективной плоскости - единице, у тора - нулю, у цилиндра, ленты Мёбиуса, а значит и у любой к-ленты – нулю.

4. Разрезания

Утверждение:
При разрезании любой ленты получается либо прямоугольник, либо одна лента, либо две ленты

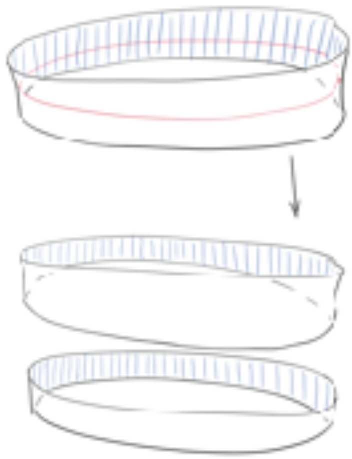
Доказательство будет дано позже в тексте

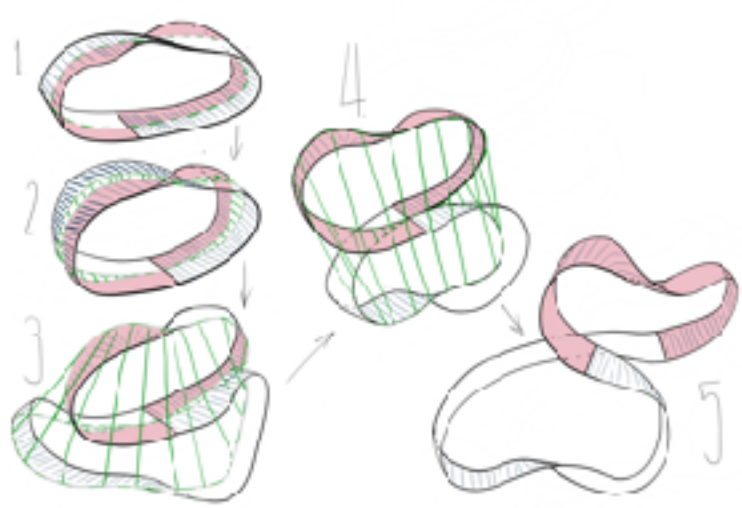
Теперь рассмотрим разрезание перекрученной ленты. Разрезав ленту поперек, мы превратим её в простой прямоугольник. Если же сделать ровный разрез вдоль, то мы разделим своим разрезом каждое сечение в отношении a/b ($a \neq b$). Если лента ориентируемая, четное число раз перекрученная, получившаяся «разметка» будет только на одной из двух имеющихся сторон и, никуда не переходя, «обойдя ленту по кругу» вернется в исходную точку, пересекая каждое сечение лишь однажды. У ленты, перекрученной нечетное число раз сторона всего одна, так что прежде чем вернуться в стартовую точку, линия «пройдет» по каждому сечению дважды - на одинаковом расстоянии от каждого края рассматриваемой прямоугольной области. Такая лента распадется на две части - ту, что примыкает к краю и ту, что посередине. Таким образом разрез ровно посередине будет для неориентируемой ленты вырожденным случаем, все другие разрезы совершенно между собой идентичны. Для ориентируемой все разрезы не будут ничем топологически друг от друга отличаться.



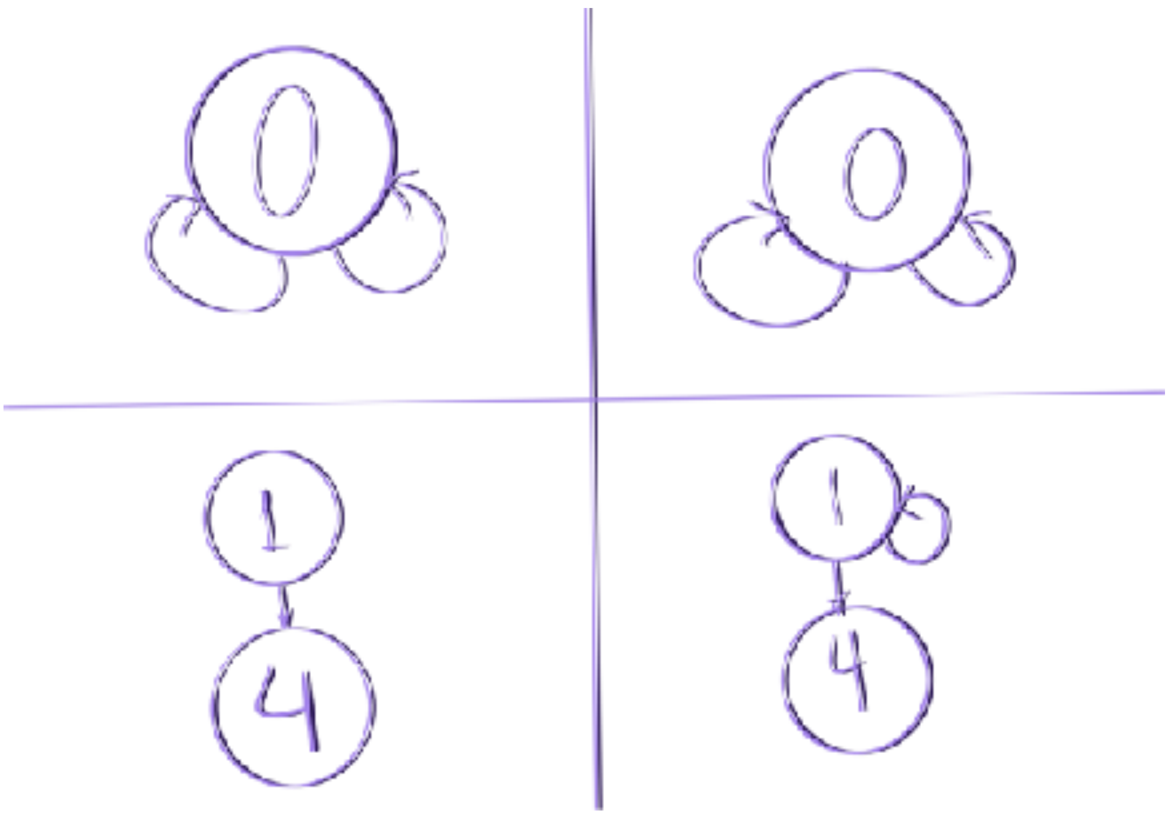
Давайте рассмотрим разрезы посредине и в отношении 1/2 (раз уж мы доказали, что конкретные числа не принципиальны) на самых простых ориентируемой и неориентируемой лентах - цилиндре и ленте Мёбиуса

Что будет, если мы еще раз разрежем получившиеся ленты пополам и отступая треть от края? Запишем результаты в виде подвешенного графа-дерева: от корня - исходной ленты - «1 перекрут» идет ребро до следующей вершины - «4 перекрута», от нее два ребра к вершинам по «4 перекрута» и так далее. Для





первых примеров довольно очевидно, что дерево имеет фрактальную структуру – его элементы повторяются. Значит, такое дерево можно превратить в конечный автомат – компактную схему, по которой даже элементарная компьютерная программа способна предсказать результат n-ного разрезания к-ленты, делящего её сечение в заданном отношении.



Выше нарисован пример конечного автомата для ноль и один раз перекрученных лент (каждое утверждение, содержащееся в этой картинке доказано экспериментом, они приведены ниже)

Попытаемся теперь построить такой автомат для произвольной ленты. Очевидно, мы отдельно рассмотрим четное и нечетное число раз перекрученные ленты, ведь их поведение различно почти при всех ранее проведенных мысленных и практических экспериментах.

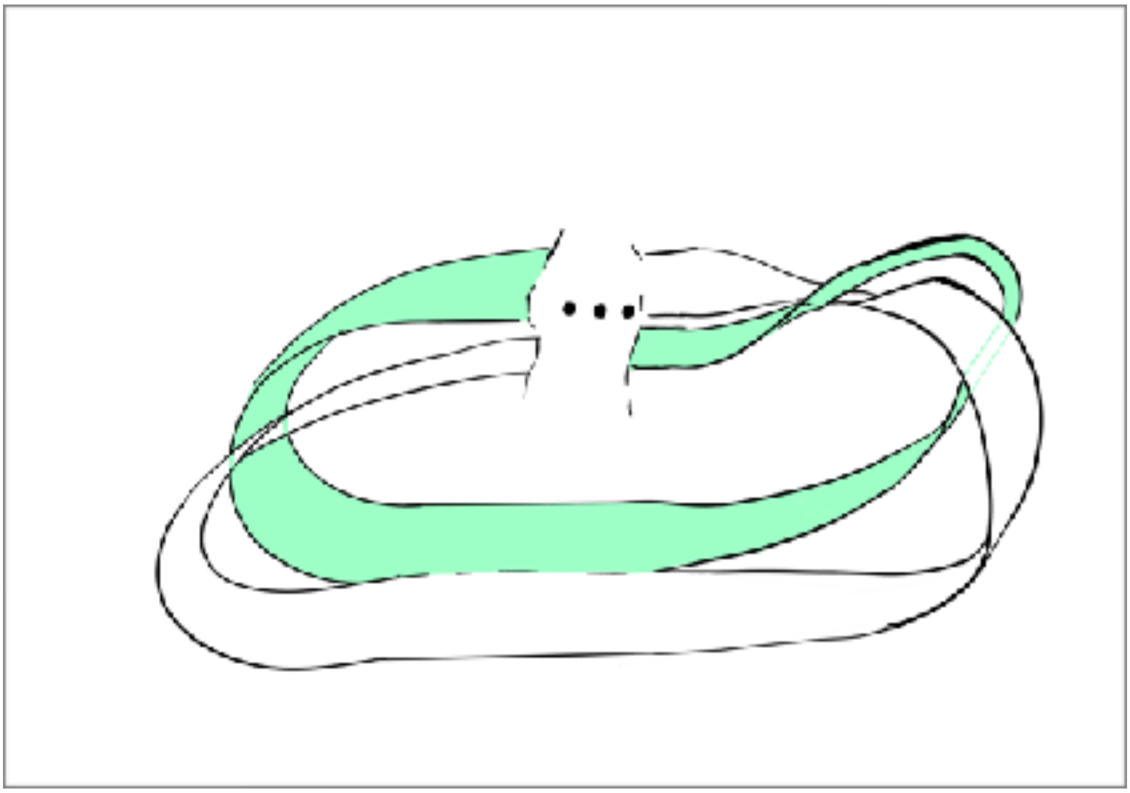
Экспериментальные данные:

При разрезании посередине ленты ведут себя так:

Число перекрутов исходной ленты	Число лент, оставшихся после разрезания	Число перекрутов первой части	Число перекрутов второй части (при её наличии)
0	2	0	0
1	1	4	-
2	2	2	2
3	1	8	-
4	2	4	4
5	1	12	-
6	2	6	6

На базе вышеприведенных экспериментальных данных гипотеза выглядит так:

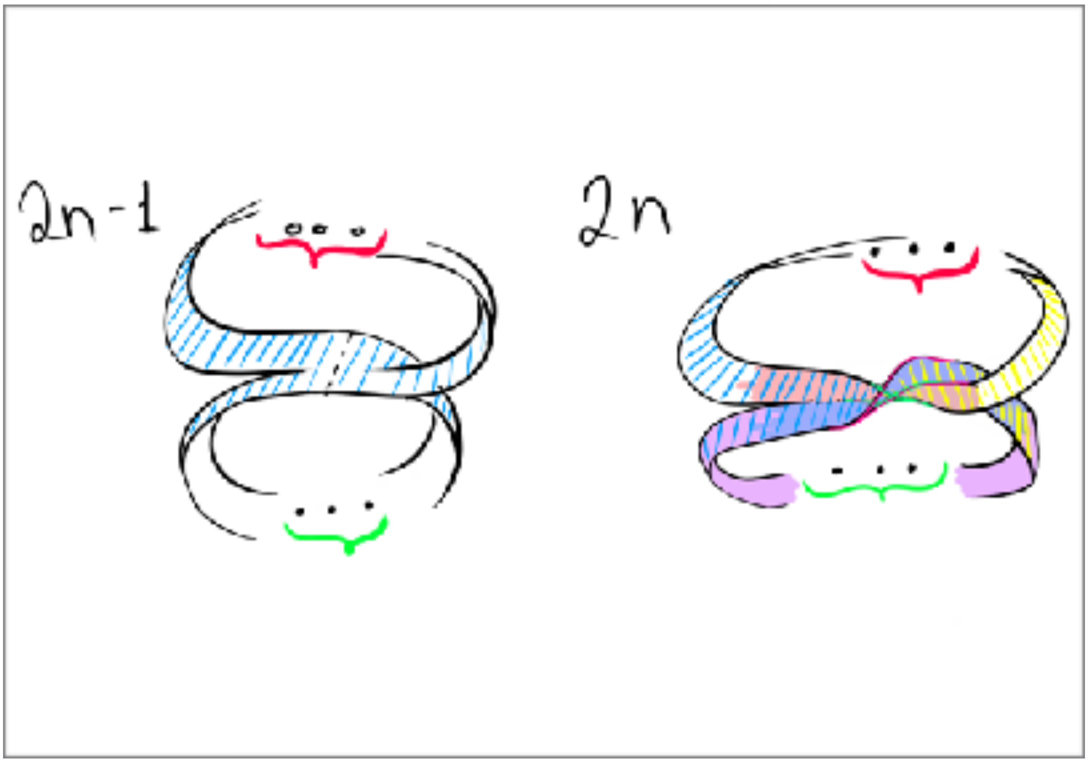
Утверждение:
При разрезании пополам 2k раз перекрученной ленты получаются две идентичные исходной по всем топологическим свойствам, 2k раз перекрученные новые ленты.
При



аналогичном разрезании ленты, перекрученной 2k – 1 раз, получается одна лента, перекрученная 4k раз, будто ленты, получившиеся при разрезании 2k раз перекрученной ленты, разрезали поперек и, не крутя, склеили друг с другом в единую.

Графическое доказательство:

Рассмотрим разрезанную посередине 2k раз перекрученную ленту – в результате



получатся 2 части (так как, проводя карандашом линию недалеко от края, на одной из частей, мы пересечем каждое поперечное сечение ленты лишь однажды, значит, эта часть не связана с другой, они раздельны). При этом каждая часть идентична исходной, ведь, если лент две, каждая перекручена там, где была перекручена первая лента и нигде в другом месте.
Тогда рассмотрим 2k – 1 раз перекрученную ленту. Проведя карандашом недалеко от края, мы пересечем каждое сечение дважды, значит две возможные части при разрезании пополам, связны. В результате получится одна часть (назовем её лента X). Если недорезать 2k раз перекрученную ленту, оставив один перекрут, то получатся два куска, составляющих X, склеенных только через этот оставшийся перекрут. Если дорезать ленту до конца, получим две части ленты X, порезанной поперек дважды и склеенной в две ленты, не перекручивая дополнительно. По предыдущему пункту получим, что две эти части представляют каждая 2k раз перекрученную ленту. Значит, будучи склеенными вместе, они были лентой перекрученной 2k + 2k = 4k раз.

Что и требовалось доказать.

Экспериментальные данные:

При разрезании, делящем сечение в отношении 1/2 ленты ведут себя так:

Число перекрутов исходной ленты	Число лент, оставшихся после разрезания	Число перекрутов первой части	Число перекрутов второй части (при её наличии)
0	2	0	0
1	2	4	1
2	2	2	2
3	2	8	3
4	2	4	4
5	2	12	5
6	2	6	6

Утверждение:
При разрезании 2k-1 раз перекрученной ленты не посередине получится две ленты, одна из которых перекручена 4k раз, а другая идентична исходной. При аналогичном разрезании 2k-ленты получится две 2k-ленты

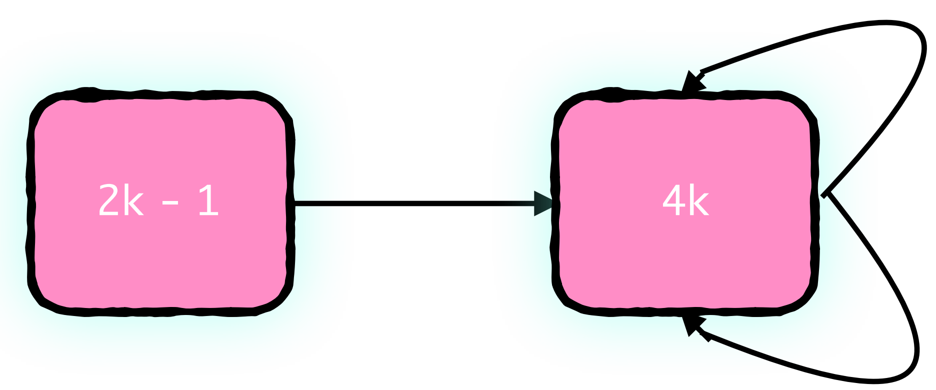
Доказательство:

При разрезании 2к-ленты в любом отношении результат, как ранее доказано, не меняется, значит он такой же, как и при разрезе посередине, что соответсвует нашему утверждению.

При разрезании 2k-1 раз перекрученной ленты часть, ближняя к краю, как ранее доказано, повторяет ленту, полученную при разрезании 2k-1-ленты пополам, а часть посередине повторяет исходную ленту, т. к. изменение ширины ленты не влияет на её топологические свойства, а в данном случае изменилась только ширина. Это легко заметить, рассматривая ленту, как процесс поворота вектора, как это сделано ранее.

Что и требовалось доказать.

Тогда любую последовательность разрезаний k раз перекрученной ленты можно представить в виде конечного автомата - последовательности результатов, получаемых при разрезании ленты. Автомат изобразим на рисунке. При разрезании пополам он выглядит так.



5. Заключение

Мы нарисовали все автоматы, необходимые, чтобы предсказать поведение к-ленты при любом разрезании и дали их графическое доказательство для случая разрезания пополам. В дальнейшем можно предъявить графическое доказательство для нечетное число раз перекрученной ленты, разрезанной на расстоянии трети от края.

В данной работе не исследуется вопрос, связанный с зацеплениями лент после разрезания. Такой анализ можно провести, используя инструментарий теории узлов.