АДМИНИСТРАЦИЯ ГОРОДА НИЖНЕГО НОВГОРОДА

Департамент образования

Муниципальное автономное общее общеобразовательное учреждение

«Школа № 187 с углубленным изучением отдельных предметов»

603136, г. Нижний Новгород, бульвар 60 лет Октября, д. 5, корп. 2,
тел./факс: (831) 467-30-52, e-mail: tema58@bk.ru

Использование NP-полных задач в теории графов

Выполнил:
Калистратов Даниил,
ученик 7 «Б» класса
Руководитель:
Парфенова Т.Ю.,
учитель по математике

Нижний Новгород

2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Достаточно часто в своей повседневной жизни мы встречаемся со схематичным изображением чего-либо: ветки метро, карта автомобильных дорог в городе, маршруты общественного автотранспорта, схемы электрических цепей. Все это можно назвать графами (см. приложение 1, 2).

Используя свойства графов решаются многие математические задачи, в том числе олимпиадного уровня (см. приложение 3). Вопросы, с которыми мы сталкиваемся в нашей практической деятельности, также можно разрешить методом построения графов. Например, нередко перед инженером ставят задачу создать электроплату, чертеж которой представляет собой плоский граф, то есть провода в этой плате не должны налегать друг на друга, иначе элетросхема окажется закороченной; эту схему возможно построить, прибегнув к теории графов. Строение молекул различных веществ также можно представить графически. То есть каждую молекулу можно изобразить в виде связного графа, где атомы являются вершинами, а ребра – связями. Причем в графическом изображении длины связей и углы между ними игнорируются. Графы, а именно деревья, широко используются в биологии. Примером может служить построение генеалогического древа, где графически представлены родственные связи какой-либо семьи. И решение многих других проблемных вопросов подвластно теории графов (см. приложение 4).

Однако на данный момент не все математические задачи с использованием метода построения графов, которые находят наибольшее применение в практической деятельности, возможно решить быстро и просто. Решением таких задач является перебор вариантов, который трудоемок и сложен. Рассмотрением этих задач мы и займемся в нашей настоящей исследовательской работе.

Объект исследования – неполиномиально разрешимые задачи.

Предметом исследования явились NP-полные задачи на графы.

Цель исследовательской работы – проведение анализа решений NP-полных задач на графы и поиск их применения в практической деятельности.

Задачи:

1. Дать определение понятия NP-полных задач.

2. Познакомиться с понятиями, используемыми в теории вычислительной сложности.

3. Рассмотреть NP-полные задачи на графы и найти примеры их применения в практической деятельности.

В настоящей исследовательской работе мы проводили анализ научных источников по теме NP-полных задач на графы, методом синтеза были сформулированы выводы, также использовались дедукционный, индукционный и классификационный методы.

Научная новизна исследования состоит в том, что мы систематизировали различные типы NP-полных графовых задач, рассмотрели их практическое применение. В дальнейшем мы намерены определить сферы деятельности, в которых будут актуальны решения NP-полных задач на графы с учетом внедрения в определенные области роботизированных (автоматизированных) механизмов.

Глава 1.

Определение понятия NP-полных задач. Понятия, используемые в теории вычислительной сложности

Одной из самых важных областей современной математики является теория вычислительной сложности. Данная теория рассматривает вопрос о том, за какое наименьшее количество простейших операций возможно решить конкретную математическую задачу. В этой теории задачи делятся на классы. Существует *класс полиномиально разрешимых задач*, или просто *P*. Так называют задачи, которые можно решить определенным способом, например некоторые задачи на графы, комбинаторные задачи, задачи на принцип Дирихле и т.д. Однако имеются задачи, которые полиномиальным алгоритмом разрешить невозможно, иначе говоря, эти задачи требуют полного перебора вариантов. Данные задачи называют «*NP-complete*», или «*NP-полные задачи*», «*NP-C*», «*NPC*» [3, 4, 9].

Существуют такие задачи (*NP-трудные*, или *NP-hard*), которые полным перебором вариантов решить нельзя, но за счет полиномиального алгоритма задачу можно свести к NP-полной. Примером такой задачи служит поиск количества Гамильтоновых циклов в графе, так как существование Гамильтонового цикла является на данный момент NP-полной задачей. Однако если эту задачу возможно будет решить полиномиальным алгоритмом, то поиск количества Гамильтоновых циклов в графе сильно упростится.

В настоящее время существует гипотеза, что все NP-полные и NP-трудные задачи являются полиномиально разрешимыми, однако алгоритмов для их полиномиального решения пока нет [3].

Сейчас для приближения к решению NP-полных задач часто используются *эвристические алгоритмы*. Это такие алгоритмы, которые являются неполными, и решить NP-полную задачу с их помощью почти не возможно. Примером эвристического алгоритма является «жадный» алгоритм (рис. 1). Предположим, у нас есть некоторая NP-полная задача и в ней представлена дорожка с развилкой. В каждой точке этой дорожки человек получает определенное количество очков. Необходимо выйти по одной из дорог, имея на финише наибольшее количество очков, причем двигаться можно только вперед.

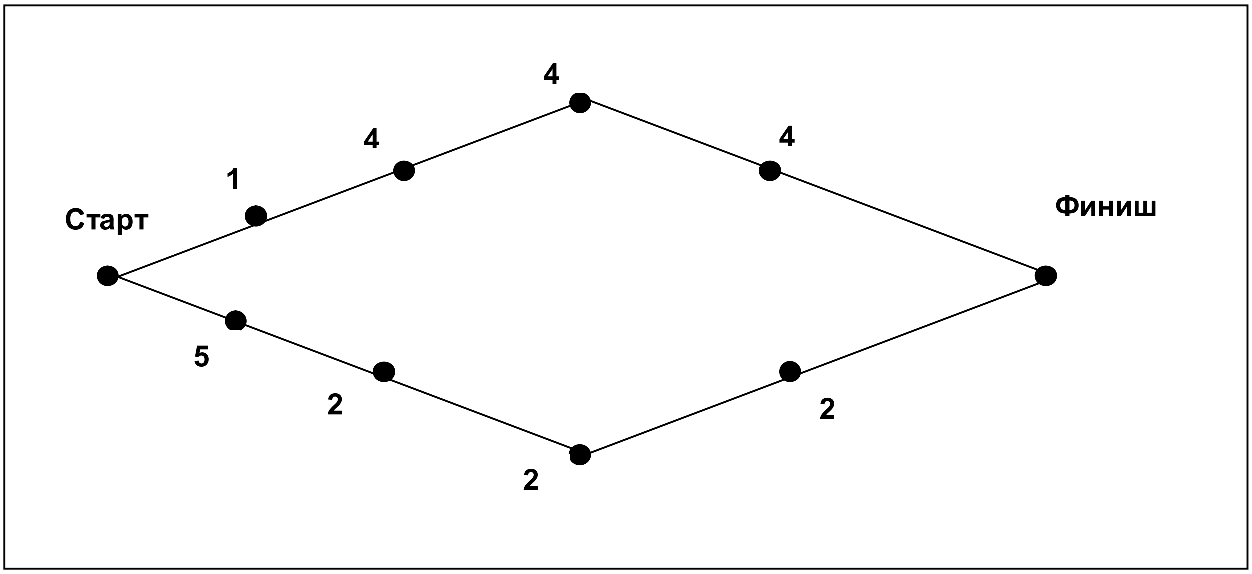


Рис. 1. «Жадный» алгоритм

Решением данной задачи будет следующее рассуждение. Мы доходим до развилки: далее если мы повернем направо, там будут находиться точки с очками 1, 4, 4, 4 (в сумме – 13 очков), если мы отправимся по левой дорожке, то нас ждут точки с 5, 2, 2, 2 очками и при выходе с нее мы получаем 12 очков. Понятно, что для того, чтобы заработать наибольшее количество очков нам нужно идти направо. Однако «жадный» алгоритм не рассматривает варианты далекого будущего, и, следуя ему, на развилке мы пойдем туда, где ближайшая точка содержит наибольшее количество очков, то есть налево, и в итоге мы проиграем. Таким образом, «жадный» алгоритм является наглядным примером эвристического.

Например, фермер для расширения своего хозяйства приобретает свиней. За одинаковую цену ему предлагают купить или два борова, или одну свинью, которая скоро опороситься. «Жадный» фермер выберет двух животных вместо одного, не предвидя того, что через некоторое время у него могло бы быть 10 и более маленьких поросят.

Также стоит упомянуть о понятии «*эвристическая функция*». Это функция, которая рассматривает альтернативы в алгоритмах на каждом шаге ветвления, чтобы решить, какой ветви нужно следовать.

Глава 2.
NP-полные задачи на графы и применение их в практической деятельности

Многие NP-полные задачи связаны с теорией графов. Самой простой из них считается задача о существовании Гамильтонового цикла в графе. Задачи такого типа появились достаточно давно (в XVIII–XIX веке), например задача о торговце. Когда один не слишком честный торговец ездил по различным городам и его целью было посетить как можно больше населенных пунктов, чтобы продать больше товара. Но в города, где он уже побывал, возвращаться нельзя, поскольку там его могут наказать за нечестную торговлю.

В настоящее время с помощью поиска Гамильтонового цикла в графе, который схематично изображает туристических путь следования, можно рассчитать маршрут экскурсии, проходящий по главным достопримечательностям города с условием, чтобы у каждой достопримечательности путешественник смог побывать ровно один раз и не более. Также можно вычислить маршрут аэролинии, проходящей по самым востребованным городам страны, причем с наименьшей затратой топлива и совершением посадки в каждом городе только один раз.

Еще одной весьма известной NP-полной графовой задачей является поиск количества вершин в графе, никакие из которых напрямую не соединены ребром, эту задачу еще называют поиском независимого множества. Данная задача может быть применима и полезна в том случае, когда в некоторую команду необходимо набрать людей, никакие двое из которых не конфликтуют между собой.

Другим ярким примером NP-полной задачи на графы служит раскраска вершин графа в определенное число цветов, причем таким образом, чтобы никакие две одноцветные вершины не соединялись ребром. Также с этой задачей связана одна NP-трудная задача – это вопрос о минимальном количестве цветов раскраски вершин графа с аналогичным условием.

В 1976 году Кеннетом Аппелем и Вольфгангом Хакеном было доказано, что в любом плоском (планарном) графе (см. приложение 2) вершины можно раскрасить в 4 цвета. Хотя ранее, в 1800-х годах, было предложено доказательство той же самой теоремы только в 5 цветах. Позднее (в 1997 и 2005 гг.) ученые предлагали более простые доказательства теоремы о 4 цветах [3].

Также следует отметить, что раскрашивать в графе можно не только вершины, но и ребра. И раскрашивать ребра нужно таким образом, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины. Минимальное число цветов, необходимое для реберной или вершинной раскраски графа, называется его хроматическим индексом – вершинным или реберным в соответствии с тем, что мы раскрашиваем.

Раскраска графов и сейчас имеет много практических применений, однако алгоритм нахождения хроматического индекса графа все еще не найден. Для демонстрации использования метода раскраски графа в практической деятельности приведем следующий пример.

Пусть у руководителя корпорации есть граф конфликтов его сотрудников. Ему необходимо рассадить персонал в некоторое количество имеющихся в наличии кабинетов таким образом, чтобы никакие двое, сидящие в одном кабинете, не конфликтовали. Для решения подобной задачи руководителю нужно раскрасить граф конфликтов в количество цветов, равное количеству комнат.

Более общей (универсальной) NP-полной задачей на графы является поиск изоморфного подграфа (см. приложение 2). Пусть у нас есть два графа, назовем их G и H. Необходимо определить, есть ли у графа G подграф, изоморфный графу H, или, наоборот, в графе H – подграф, изоморфный графу G. Такая задача часто применяется для решения более сложных задач. То есть предположим, что нам нужно найти хроматический индекс графа G, если мы знаем хроматический индекс графа H и нам известно, что в графе G есть подграф, изоморфный графу H. Таким образом мы способны приблизиться к нахождению хроматического индекса графа G и можем сказать, что хроматический индекс графа G не меньше хроматического индекса графа H.

Глава 3.
Решение NP-полных задач на графы

Предлагаем рассмотреть решение NP-полных задач на графы, с которыми мы можем столкнуться в своей практической деятельности.

Предположим, у нас есть 12 друзей и 5 из них мы хотим пригласить на празднование Дня рождения. На мероприятии никакие двое приглашенных не должны конфликтовать между собой. При этом один из них, допустим, брат именинника Максим, обязательно должен присутствовать на торжестве. Построим граф конфликтов (рис. 2). В первом действии мы удаляем из списка приглашенных тех, кто конфликтует с братом, так как это условие является обязательным. Далее рассмотрим взаимоотношение каждого из друзей именинника с оставшимися 11 и выберем 4 человек, которые не конфликтуют друг с другом.

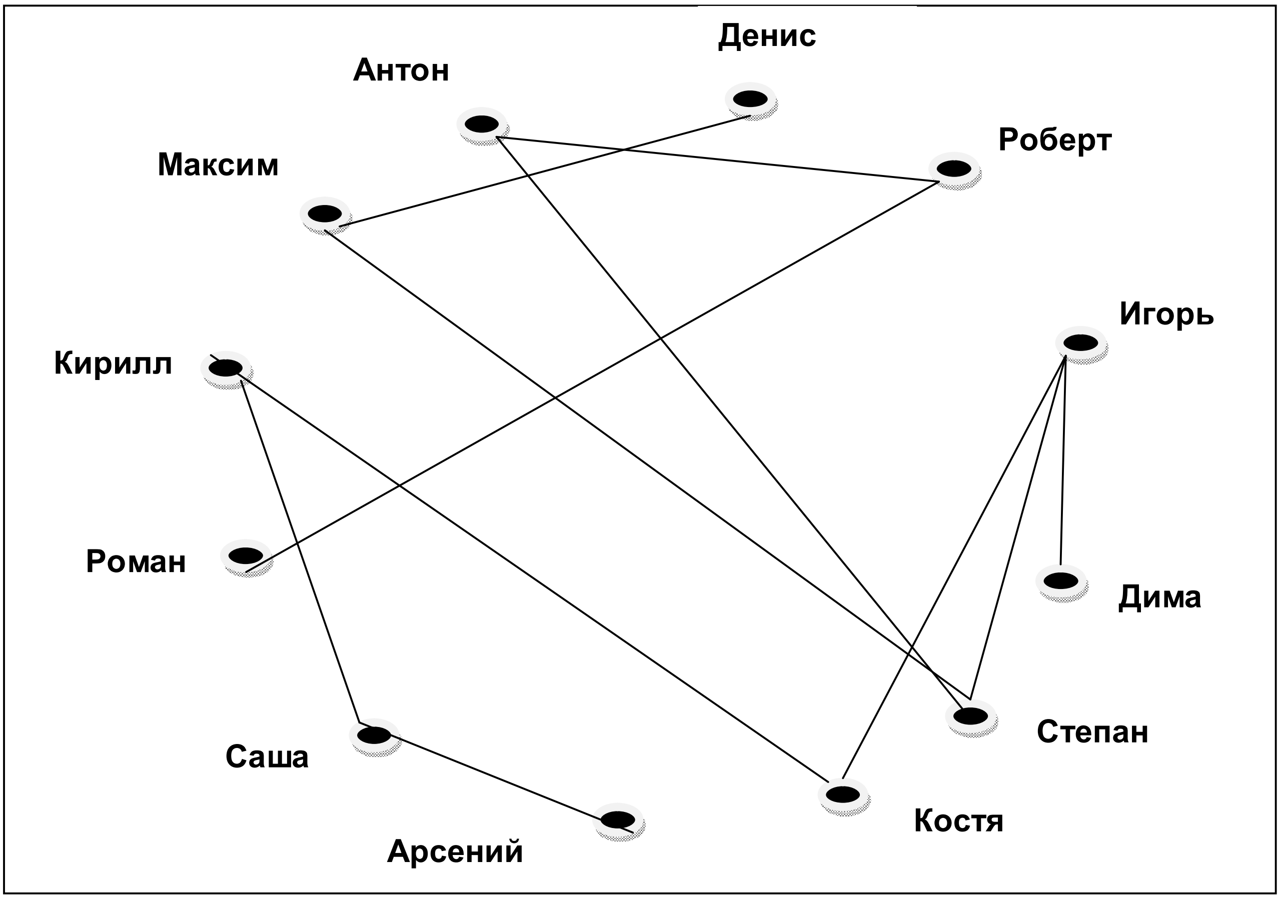


Рис. 2. Граф конфликтов

Рассмотрим еще одну задачу. На олимпиаду по математике пришли10 школьников. При этом некоторые из них знакомы между собой. Задача жюри – рассадить детей на нескольких рядах таким образом, чтобы на каждом ряду никакие двое школьников не были знакомы друг с другом. Нужно найти количество рядов, которые понадобятся жюри. Построим граф знакомств и найдем его хроматический индекс (рис. 3). Получим число 3. Докажем, что этот граф не является двудольным. Заметим, что вершины, на которые указывает стрелка, соединены ребром с вершинами, раскрашенными в белый и черный цвета, значит, для них понадобится третий цвет, пусть он будет красным. И поскольку у нас получилось раскрасить граф в три цвета, следовательно, хроматический индекс равен 3, то есть для соблюдения условий задачи жюри потребуется три ряда.

Решение следующей задачи возможно с помощью построения Гамильтонового цикла. Перед проведением Чемпионата мира по футболу Организационному комитету необходимо провести обследование 8 важных объектов в городе N. В городе N есть одна особенность – одностороннее движение транспорта по узеньким улочкам. В целях экономии времени возле каждого объекта нужно побывать ровно один раз и не более.

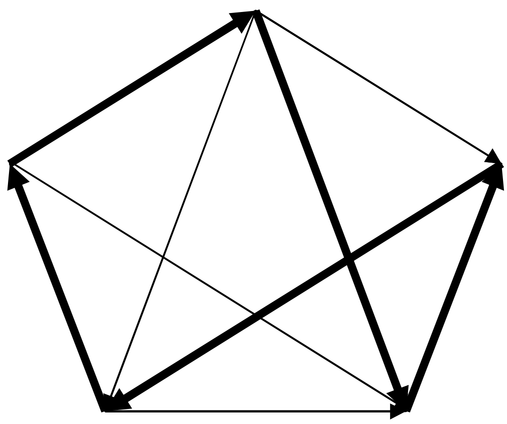


Рис. 3. Гамильтонов цикл

Сначала убедимся, что граф на рисунке 3 является Гамильтоновым. Для этого воспользуемся одним из доказанных признаков Гамильтоновости графа. Так, теорема Редеи–Камиона гласит: «Любой связный турнир[1] – Гамильтонов». Поскольку граф, построенный по маршруту к достопримечательностям города N, является сильносвязным турниром, то он является Гамильтоновым. Затем построим Гамильтонов цикл, который будет проходить по всем вершинам графа, изображенного на рисунке 3.

[1] Турниром называется ориентированный граф, в котором каждая вершина соединена с каждой, фактически это полный граф, только ориентированный. Сильносвязным называют граф, в котором из любой вершины можно добраться до любой другой с учетом того, что граф ориентированный, то есть по некоторым дорогам можно ездить только в одном направлении.

Заключение

Сейчас уже опубликовано множество работ, где предлагаются различные полиномиальные алгоритмы решения NP-полных задач или доказывается существование таких алгоритмов, а также опровергается их существование. Однако ни одна работа еще не получила подтверждения мирового математического сообщества, несмотря на то, что вопрос о соотношении классов задач P и NP остается одним из самых важных в современной математике.

В случае нахождения полиномиального алгоритма решения некоторой NP-полной задачи технологический прогресс человечества мог бы ускориться в миллионы раз, подобно тому, как изобретение машин (манипуляторов, роботов и т.п.) избавило людей почти от всех видов тяжелого ручного труда. Имея возможность составления алгоритма, все научные вычислительные исследования могли бы производиться компьютерами. При этом следует учитывать, что сами классы P и NP очень приближенно описывают вычислительную сложность алгоритмов. Гораздо более точной моделью является понятие алгоритмов с наименьшим числом элементарных операций, решающих некоторую переборную задачу. Однако такая модель на данном этапе не может использовать свойство сводимости задач внутри одного класса сложности, как в теории NP-полноты. Возможно, именно в указанном направлении будет развиваться математическая теория вычислительной сложности.

Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие выводы:

1. NP-полные задачи активно используются в практической деятельности и поэтому поиск их полиномиального решения является в настоящее время одной из актуальных задач математической науки.

2. Считаем, что практически любая NP-полная графовая задача в случае решения найдет свое прямое практическое применение, в то время как большинство задач олимпиадного уровня напрямую применения в практике не имеют.

3. Решение NP-полной графовой задачи представляет собой некоторый универсальный алгоритм и ответ на задачу, которую возможно решить указанным алгоритмом, будет востребован во многих сферах деятельности.

Список использованных источников и литературы

1. *Гарднер М.* Математические досуги / под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1972. 496 с. с илл.

2. *Гуровиц В.М., Ховрина В.В.* Графы. М.: МЦНМО, 2008. 32 с.

3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Изд-во «Мир», 1982. 416 с.

4. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин, И.С. Рубанов. Киров: Изд-во «АСА», 1994. 272 с.

5. *Мельников О.И.* Занимательные задачи по теории графов. Минск, 2001. 144 с.

6. *Мельников О.И.* Незнайка в стране графов: пособие для учащихся. М., 2007. 160 с.

7. Научная библиотека. Графы. URL: http://sernam.ru/book_e_math.php?id=33

8. *Оре О.* Графы и их применение. М.: Изд-во «Мир», 1965. 336 с.

9. Теоретический материал кружка творческой лаборатории «2×2».

Приложение 1

Определение графа, история теории графов

Граф – это схематичное изображение, состоящее из точек и линий. Первой работой по теории графов как математической дисциплине считают статью *Эйлера* (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кенингсбергских мостах. Леонард Эйлер показал, что нельзя обойти семь городских мостов и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

Следующий импульс теория графов получила спустя почти 100 лет в связи с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам. В 30-е годы немецкий математик Дене Кениг впервые провел систематическое исследование подобных схем и дал им общее название «графы». Первое произведение Кенига о графах вышло в Лейпциге в 1936 году. В 1962 году в Англии была издана книга французского математика Клода Бержа «Теория графов и ее приложение». В 1936 году вышла в свет брошюра Остена Оре «Графы и их применение», которая содержит элементарное введение в теорию графов. Оба издания определенно представляют интерес для любителей занимательной математики. Сотни известных головоломок, как кажется не имеющих ничего общего друг с другом, легко разгадываются с помощью теории графов.

В настоящее время теория графов охватывает большой материал и активно развивается. Учение о графах пересекается со многими разделами теории множеств, комбинаторики, алгебры, геометрии, теории матриц, теории игр, математической логики и с другими математическими дисциплинами.

Понятия, используемые в теории графов, и свойства графов

Понятия и определения в теории графов

Граф состоит из точек, именуемых *вершинами*. Линии, которые соединяют вершины, являются *ребрами* графа.

Вершины, из которых не исходит ни одного ребра, называются *изолированными вершинами*, а граф, который не имеет ни одного ребра, получил название *нуль-графа*. Количество вершин в таком графе не ограничено.

Когда ребро начинается и заканчивается в одной и той же вершине, не проходя через другие вершины, это ребро можно назвать *петлей* (рис. 2.1). Из одной вершины может выходить неограниченное количество петель.

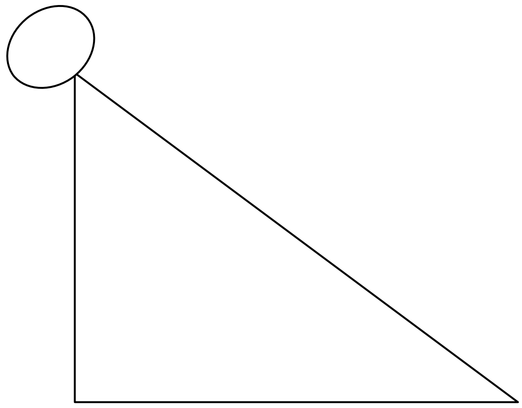


Рис. 2.1. Граф с петлей, выходящей из вершины

Полным называют граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром. Вот примеры полных графов (рис. 2.2).

Рис. 2.2. Примеры полных графов

Степень вершины графа – это количество дуг или ребер, выходящих из этой вершины. На рисунке 2.3 около каждой вершины указана ее степень.

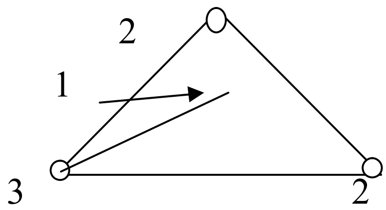


Рис. 2.3. Изображение степени вершин графов

Существуют *изоморфные графы*. Это графы, в которых вершины с одинаковым наименованием имеют одинаковую степень. Причем эти графы могут выглядеть неодинаково, то есть сильно отличаться друг от друга. Так, графы I и II, изображенные на рисунке 2.4, изоморфны.

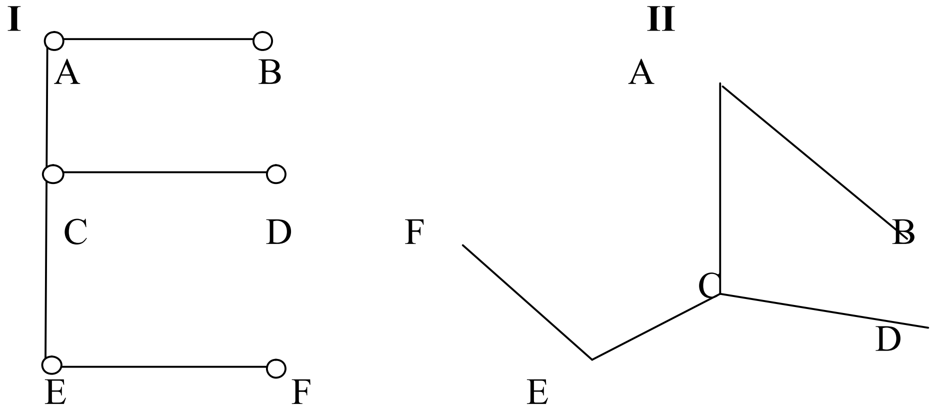


Рис. 2.4. Изоморфные графы

Также стоит ознакомиться с понятиями плоского и пространственного графа. *Плоским графом* называют граф, имеющий пересечение ребер только в месте вершин. *Пространственный граф* имеет пересечение, находящееся не в точке вершины. Однако, если у графа есть изоморфный ему плоский граф, то его также можно назвать плоским.

На рисунке 2.5 изображены два изоморфных графа, и эти графы можно назвать плоскими.

Рис. 2.5. Изоморфные, или плоские, графы

Примером пространственного графа является схематичное изображение сложной транспортной развязки с виадуками (рис. 2.6).

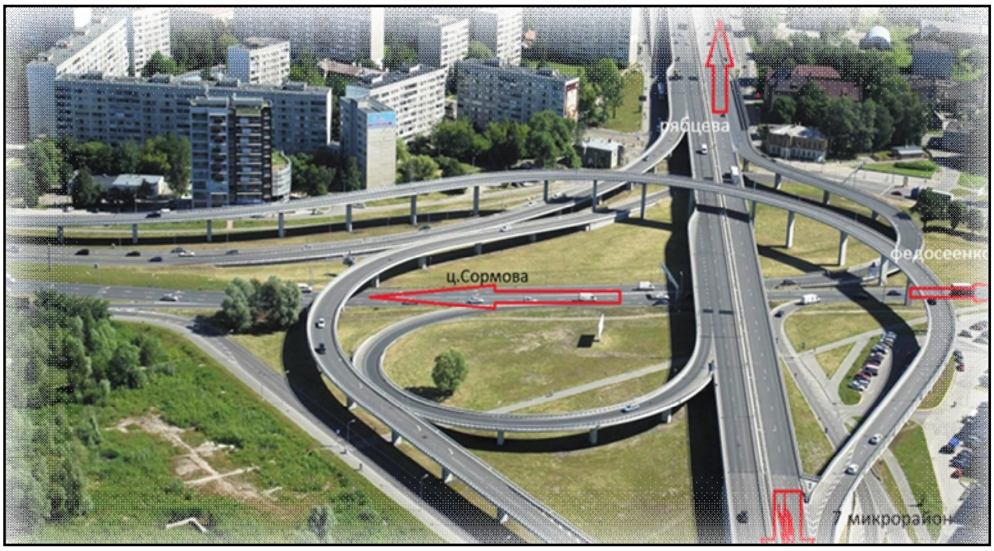


Рис. 6. Сеть автодорог в городе

Графы могут быть связными и несвязными. В *связанном графе* из любой вершины каким-то образом (можно по одной дуге или ребру либо по двум, трем и т.д.) добраться до любой другой вершины (рис. 2.7). В *несвязанном графе* так сделать не получится (рис. 2.8).

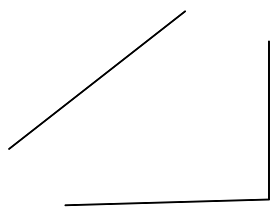


Рис. 2.7. Несвязный граф

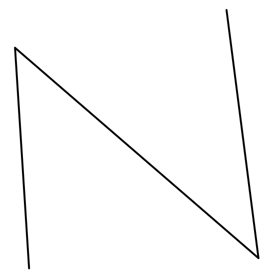


Рис. 2.8. Связный граф

В несвязном графе различают *компоненты связности*. Множество вершин, в которые можно попасть из некоторой вершины A, является компонентой связности. Другой компонентой связности считается то же самое множество вершин, однако в это множество нельзя попасть из вершины A. Так, несвязный граф на нашем рисунке 6 имеет две компоненты связности, а любой связный граф имеет одну компоненту связности.

Ориентированный граф – это граф, в котором указывается направление его ребер, то есть в этом графе все ребра представлены в виде стрелок (рис. 2.9). Однако стрелки могут указывать направление в обе стороны. Например, если представить это ребро в виде автомобильной дороги, то по ней будет разрешено движение в обе стороны – трасса с двухсторонним движением.

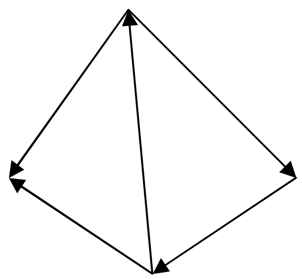


Рис. 2.9. Ориентированный граф

Также у ориентированных графов у каждой вершины можно подсчитать ее *степень входа и выхода ребер*. Степенью входа и выхода называют количество входящих или выходящих ребер, идущих из вершины или в вершину. На рисунке 2.10 возле каждой вершины указаны степень входа (первая цифра) и выхода (вторая цифра).

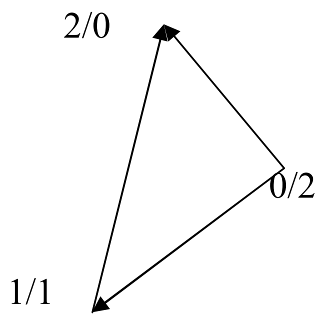


Рис. 2.10. Ориентированный граф с указанными степенями входа и выхода

Двудольным графом называют такой граф, вершины которого можно разукрасить в два цвета таким образом, что две вершины, соединенные ребром, будут разных цветов (рис. 2.11).

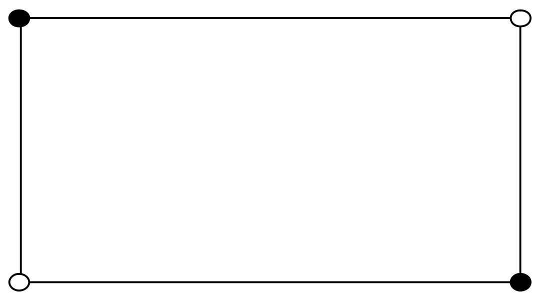


Рис. 2.11. Двудольный граф

Полный граф, содержащий более двух вершин, не может быть двудольным.

Введем понятие *подграфа*. Пусть изначально дан некоторый граф, из этого графа мы можем удалять ребра или вершины (с ребрами, которые из них исходят). Таким образом мы можем получить новый граф, который содержался в изначальном графе. Это и будет наш подграф. Выделяют два типа подграфов: реберный и индуцированный (вершинный). Тип подграфа зависит от того, что мы удаляем в первичном графе.

Свойства графов

Если сложить все степени вершин графа, то мы получим *удвоенное количество дуг или ребер графа*. Сумма степеней вершин в графе есть число четное.

Рассмотрим следующую *теорему*:

1. Пусть дан связный граф с n вершинами. Тогда в нем не менее $n–1$ ребер.

2. Пусть граф с n вершинами распадается на c компонент связности. Тогда в нем не менее $n–c$ ребер. Теперь попробуем решить теорему и привести доказательства.

Удалим в графе все ребра. Теперь все его вершины изолированы. То есть мы получили нуль-граф с n компонентами связности. Одно ребро либо связывает две компоненты в одну, либо никак не изменяет разбиение на компоненты. Тем самым, когда мы восстанавливаем ребра в графе, чтобы получить связный граф, понадобиться не менее чем $n–1$ ребер. Если же мы хотим получить несвязный граф с c компонентами связности, то понадобится не менее чем $n–c$ ребер.

Приведем еще одно свойство графов: *число нечетных вершин любого графа четно*. Это справедливо, когда граф вообще не имеет нечетных вершин, так как ноль – это четное число.

Доказательство: если в некоторой сумме есть нечетное число нечетных чисел, то и результат суммы является числом нечетным. А так как мы уже говорили, что сумма степеней вершин в графе число четное, то в графе должно содержаться четное число нечетных вершин.

Линия на графе, не проходящая не через одну вершину более одного раза, называется *дугой*. Путь, проходящий даже по нескольку раз одни и те же вершины, но не содержащий одних и тех же ребер, называется *цепью*. Дуга представляет собой цепь, все вершины которой различны, то есть в этой цепи по каждой вершине мы проходим только по одному разу и не более. Дугу также можно назвать *элементарной цепью*.

В теории графов существует такое понятие, как *«деревья»*. Деревом называют граф, не имеющий циклов. В дереве есть так называемая *висячая вершина*.

Это вершина степени 1. В любом дереве есть хотя бы две висячих вершины. Также в дереве количество вершин ровно на одну единицу больше количество ребер.

В начальной школе часто встречались задачи, в которых надо было обвести фигуру, проходя по каждой линии ровно один раз, но сделать так не всегда удавалось. Такого типа задачи можно решить с помощью графов. Чтобы получилось обвести граф, выполняя указанные требования, в нем должен существовать эйлеров цикл. Путь по вершинам и всем ребрам графа, начинающийся в какой-то вершине и проходящий через каждое ребро не более одного раза и заканчивающийся в начальной вершине, называется *эйлеровым циклом*. Если путь не достигает начальной вершины (где путь берет начало) и заканчивается ранее, однако имеет остальные свойства эйлерова цикла (начинается в одной вершине и проходит через каждое ребро по одному разу, но не охватывает все ребра графа), то такой путь называется *циклом*. Для существования в связном графе эйлерового цикла необходимо и достаточно, чтобы степень каждой вершины графа была четной.

Гамильтоновой линией называется цикл, проходящий через каждую вершину по одному разу, но не покрывающий всех ребер. Имеется известная аналогия между эйлеровыми и гамильтоновыми линиями. Первая проходит один раз по каждому ребру, а вторая – по каждой вершине. Для эйлерова графа достаточно проверить, являются ли все его вершины четными, а для гамильтоновых линий до сих пор не существует точного критерия, входят ли они в граф. Однако для некоторых достаточно громоздких примеров найдена гамильтонова линия. Так, например, вычислена кратчайшая циклическая аэролиния, проходящая по всем главным городам США.

Приложение 3

Примеры решения математических задач методом графов

Графы можно использовать для решения различных математических задач. Вот некоторые из них.

1. В некотором государстве 100 городов, из которых выходит по 3 дороги, и 100 городов, из которых выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог?

Решение

Зная, что сумма степеней графа равна удвоенному количеству ребер, можно произвести следующие действия.

100×3=300 – количество дорог, выходящих из городов, из которых выходит по 3 дороги.

100×4=400 – количество дорог, выходящих из городов, из которых выходит по 4 дороги.

(400+300):2=350 – количество дорог в некотором государстве.

Ответ: всего 350 дорог в государстве.

2. В городе открыли метрополитен, в котором из одной станции выходит 4 железнодорожных пути, из трех других – по 3 пути, еще из трех – по 2 пути, а из последней станции выходит только 1 путь. Возможно ли при закрытии одного из путей на ремонт разделить карту действующих путей на две части?

Решение. Нас спрашивают, возможно ли разделить карту действующих путей на две части, убрав одну линию. Значит, нужно найти и нарисовать такой граф, в котором, если убрать одну линию, можно будет разделить граф на две самостоятельные части. Пример такого графа находится внизу (рис. 3.1).

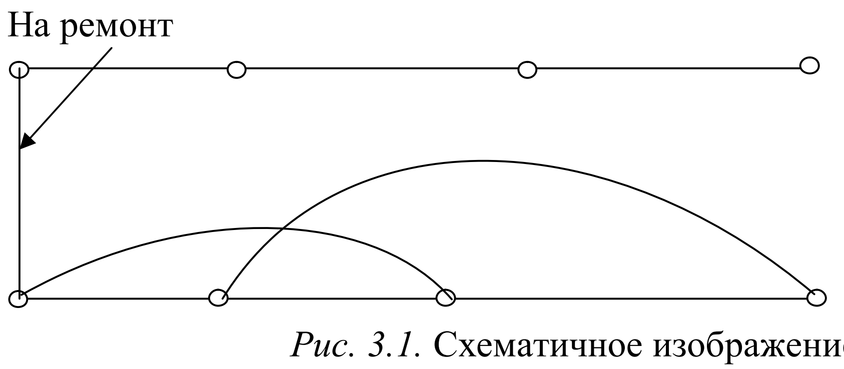


Рис. 3.1. Схематичное изображение железнодорожных путей в метрополитене

3. Оля и 6 ее друзей разговаривали по телефону (рис. 3.2). Оля считает, что каждый ее друг поговорил 3 раза, она сама поговорила со всеми, а с Мариной – даже 2 раза. Не ошиблась ли Оля?

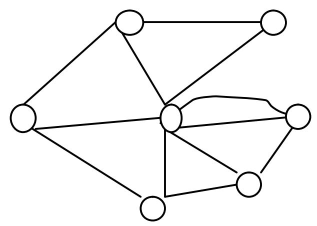
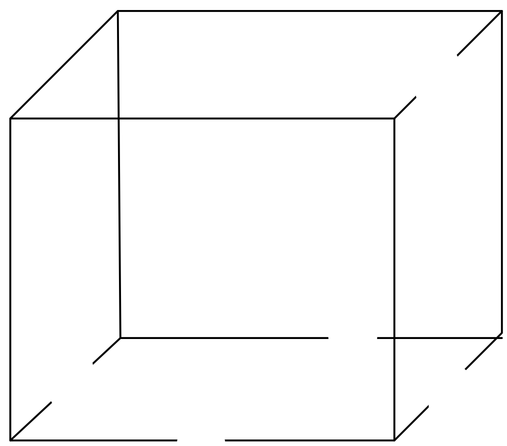


Рис. 3.2. Схематичное изображение телефонных звонков (в центре – Оля)

Ответ: Оля ошиблась, так как если с Мариной она поговорила 2 раза, то она могла поговорить еще с одним человеком и, таким образом, один друг Оли поговорит только 2 раза, а не 3.

4. Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился?

Решение: Мы удаляем ребра до той ситуации, когда при удалении хотя бы еще одного ребра получится несвязный граф, то есть граф, по которому не возможно из одной вершины добраться до другой, даже пересекая другие вершины (рис. 3.3).



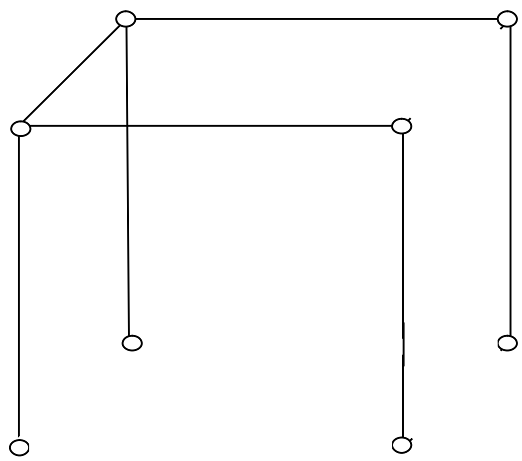


Рис. 3.3. Вариант перекусывания ребер в кубе

5. Возьмем шахматную доску 4×4 и отрежем у нее правый нижний угол. Возможно ли на такой доске пройти конем так, чтобы конь побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Если «да», то приведите пример, если «нет», докажите это.

Ответ: Это возможно. Такой граф может существовать, вместо вершин в этом графе будут клетки и будет одна клетка, где конь начинает движение, и одна клетка, где конь заканчивает движение (рис. 3.4). У этих клеток (вершин) степень нечетная, а в остальных – четная. Соответственно такой граф возможен, так как в нем четное количество нечетных вершин.

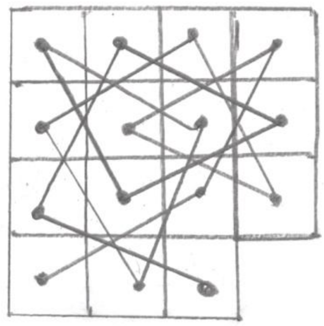


Рис. 15. Схематичное изображение ходов конем
на предложенной в условии задачи доске

6. Система станции метро устроена таким образом, что с каждой станции на каждую можно проехать единственным образом. Докажите, что одну из станций можно закрыть (без права проезда через нее) так, что это свойство сохранится.

Решение. Обозначим станции как вершины графа. Если между станциями есть путь, то соединим их ребрами. Согласно условиям задачи мы получим граф-дерево. Как мы знаем, дерево содержит минимум две висячие вершины. Если мы закроем станцию, которая обозначена висячей вершиной, то свойства, указанные в задаче, сохранятся.

Приложение 4

Решение задач с помощью графов в других науках

Применение метода графов в физике

Нередко перед инженером ставят задачу создать электроплату, чертеж которой является плоским графом, то есть провода в этой плате не должны налегать друг на друга, иначе элетросхема окажется закороченной, эту схему возможно построить, прибегнув к теории графов.

На рисунке 4.1 требуется соединить проводами-линиями одинаковые буквы так, чтобы получился плоский граф.

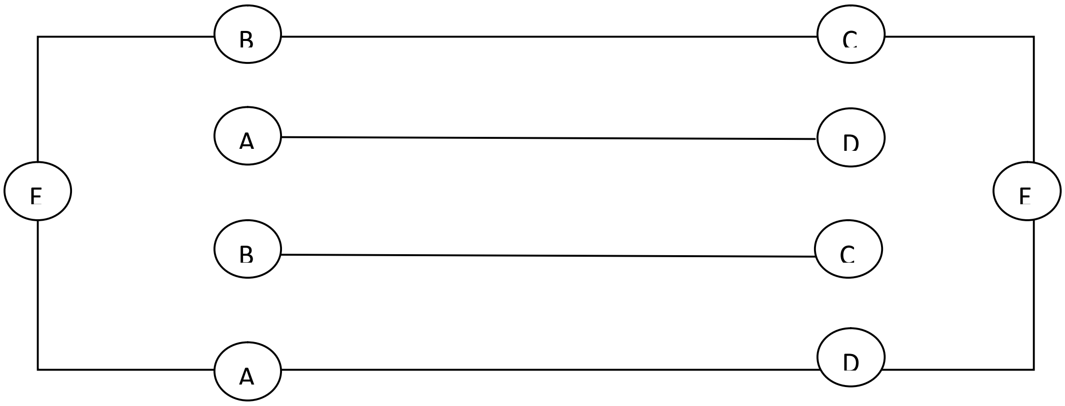


Рис. 4.1. Схематичное изображение электроплаты

Решение данной задачи будет выглядеть следующим образом (рис. 4.2). Схема не будет закороченной, так как линии-провода не пересекают друг друга, а значит, электросхема будет исправной.

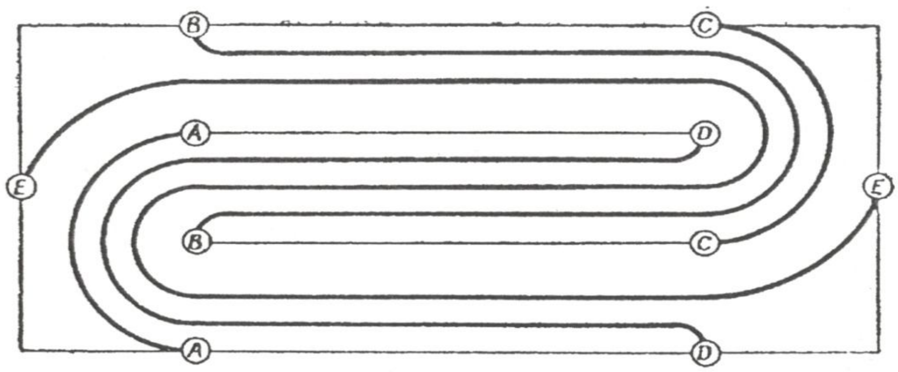


Рис. 4.2. Электросхема

Применение метода графов в химии

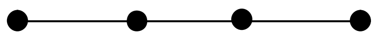
Одной из основных задач химии является изучение строения веществ. Великий российский химик А.М. Бутлеров доказал, что в химическом строении важен порядок соединения атомов в молекуле, от этого зависит результат соединения. Строение молекул можно представить графически. То есть каждую молекулу можно изобразить в виде связного графа, где атомы являются вершинами, а ребра – связями (рис. 4.3). Причем в графическом изображении длины связей и углы между ними игнорируются.

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$$

Бутан

$$\begin{array}{c} CH_3 - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}} - CH_3 \end{array}$$

Изобутан



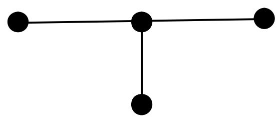


Рис. 4.3. Схематическое изображение строения молекул химических веществ

Графы – это математические объекты, их можно записать в виде чисел, обозначающих вершины. Из этого следует идея выражать строение молекул числами, которые связаны со свойствами молекул-графов. Эти числа в химии называют топологическими индексами. Если рассчитать какой-либо топологический индекс для большего числа молекул, то можно предсказать свойства ранее еще несинтезированного вещества. К настоящему моменту учеными-химиками и математиками уже выведено более сотни таких индексов.

Графы и биология

Графы, а именно деревья, широко используются в биологии. Примером может служить построение генеалогического древа, где графически представлены родственные связи какой-либо семьи (рис. 4.4).

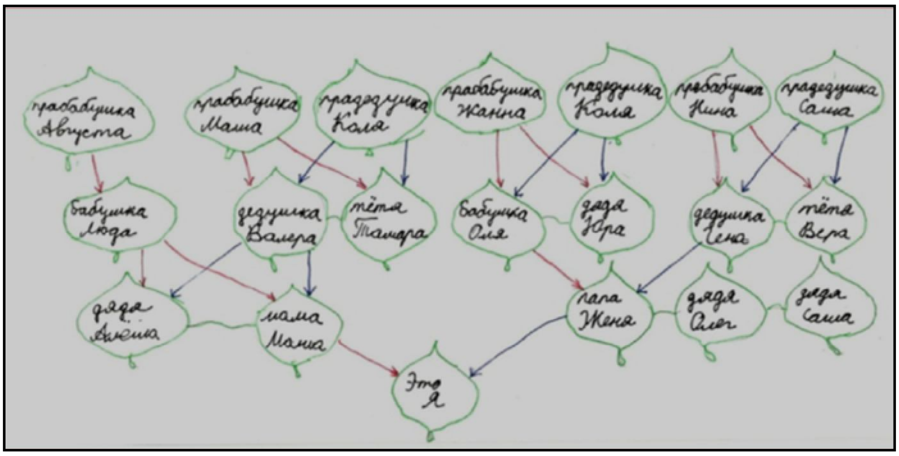


Рис. 4.4. Генеалогическое древо семьи Калистратовых

Деревья играют большую роль в биологии. Так, с помощью дерева можно изобразить размножение бактерий. Каждая бактерия при размножении либо умирает, либо делится на две новых. В конце дерева мы получим количество бактерий, произошедших от первой бактерии за определенный промежуток времени.

Также схематично при помощи построения графа-дерева возможно показать деление клеток в живом организме. Однако у подобных клеток есть два варианта деления. В результате митоза клетка делится на две подобные одинаковые клетки, а после мейоза образуются уже четыре клетки. Таким образом, точное количество клеток в конце делений предугадать нельзя. Поэтому с помощью возведения дерева в конце мы способны узнать примерное количество получившихся клеток. Для этого необходимо изобразить дерево, когда все клетки делятся митозом, и дерево, в котором все клетки делятся мейозом. Тогда мы получим возможный наименьший результат деления и возможный наибольший результат деления.

Применение графов в экономике

Теперь рассмотрим задачи, связанные с определением финансовых затрат на перевозку груза с определенной массой. Например, необходимо перевезти груз из Новосибирска в Томск. Такую доставку можно осуществить тремя способами: поездом по железной дороге, баржей по реке, автомобилями по автостраде. Каждый из указанных способов доставки занимает определенное количество времени и требует определенных материальных затрат.

Соединим на условной топографической карте линиями-графами пункты А (Новосибирск) и В (Томск) (рис. 4.5). Рассмотрим все три варианта перевозки груза массой 1000 тонн (табл. 4.1–4.3).

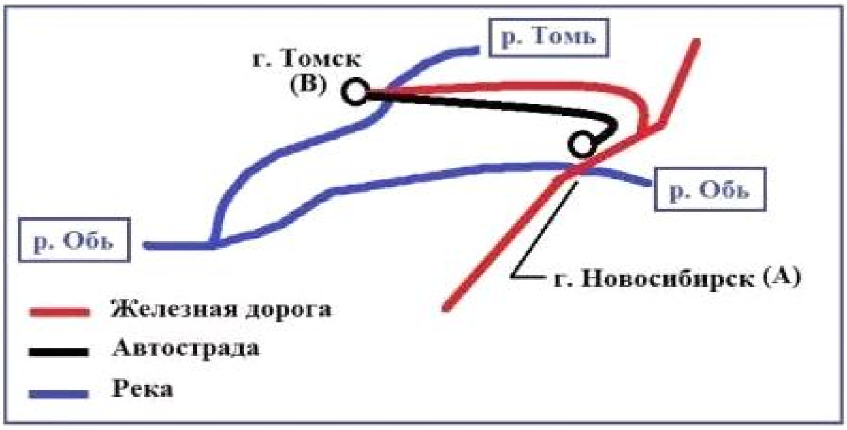


Рис. 4.5. Изображение на условной топографической карте путей доставки груза из Новосибирска в Томск

Таблица 4.1

Расчет стоимости перевозки груза по реке

Вес груза	Вид состава	Цена за сутки	Время в пути	Итого
1000 тонн	Буксир + баржа	60 000 рублей	4 суток	240 000 рублей

Таблица 4.2

Расчет стоимости перевозки груза по железной дороге

Вес груза	Количество вагонов	Время в пути	Итого
1000 тонн	17	1 сутки	2 800 000 рублей

Таблица 4.3

Расчет стоимости перевозки груза по автостраде

Вес груза	Количество рейсов	Время в пути за один рейс	Цена за один рейс	Итого
1000 тонн	100	6 часов	37 000	3 700 000 рублей

Графы решений:

A 1 баржа B — Стоимость: 240 000 рублей

4 суток

A 17 вагонов B — Стоимость: 2 800 000 рублей

1 сутки

A 100 рейсов B — Стоимость: 3 700 000 рублей

6 часов/рейс

Ответ: самый выгодный способ перевозки груза массой 1000 тонн – по реке, самый быстрый – по железной дороге.