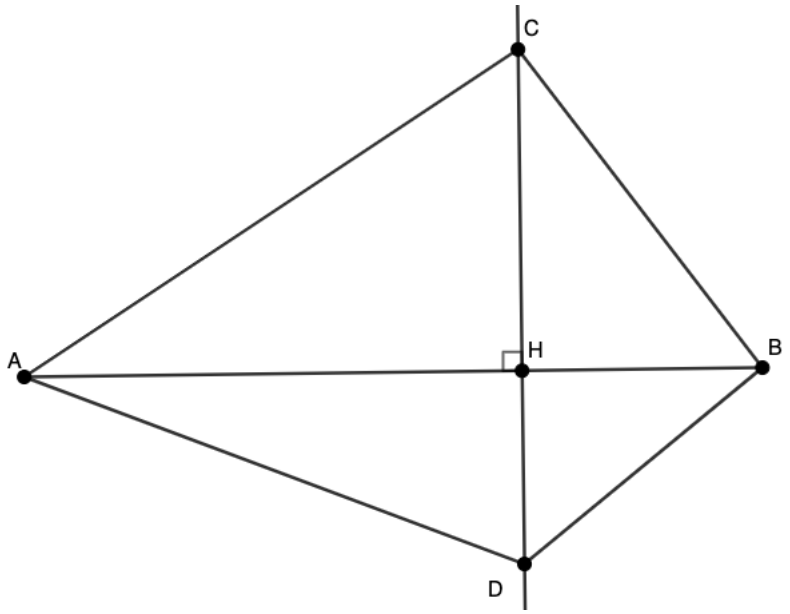
Ортологичные треугольники

Луценко Антон, ФМШ 2007, 2020г.

В этом реферате будет рассмотрен ряд теорем, которые приведут к доказательству теоремы Штейнера и ортологичным треугольникам. Будет рассмотрена задача из статьи Дария Гринберга "Synthetic proof of Paul Yiu's excircles theorem". Я немного изменил доказательство пункта а, чтобы продемнострировать как в задачах работает теорема Карно и ее следствия. Пункт б в статье решен при помощи проективных преобразований. Я нашел доказательство без использования этих преобразований. В статье был упомянут один интересный факт, который не был доказан и рассмотрен. Здесь мы также рассмотрим и этот факт.

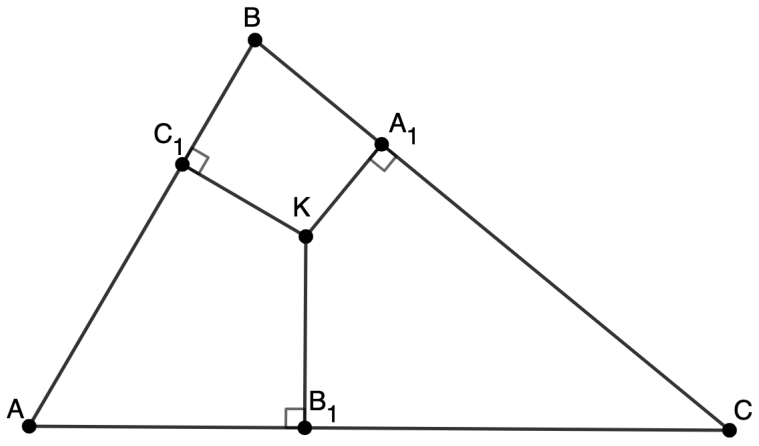
В работе мы будем использовать следующие факты:

Свойство перпендикуляра Если прямые AB и CD перпендикулярны, то $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$



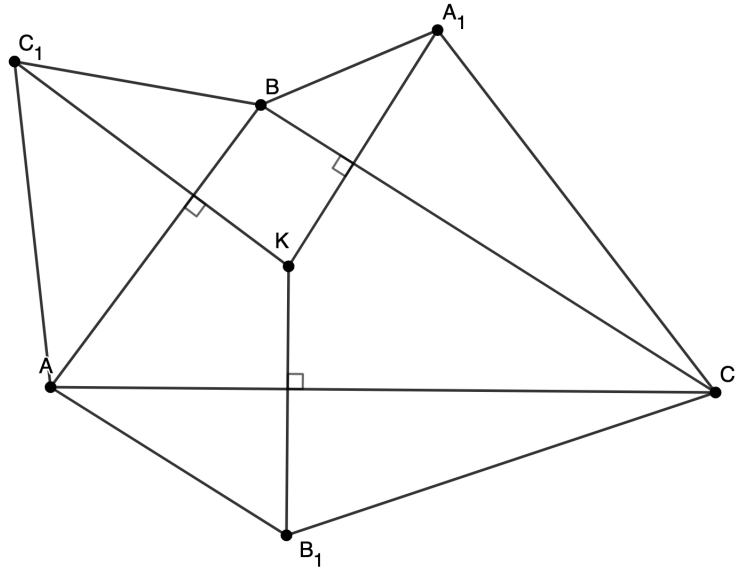
Теорема Карно Рассмотрим $\triangle ABC$. На стороне BC отметим точку A_1, на AC точку B_1 и на AB точку C_1. Перпендикуляры к сторонам в этих точках пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = BC_1^2 + CA_1^2 + AB_1^2$$

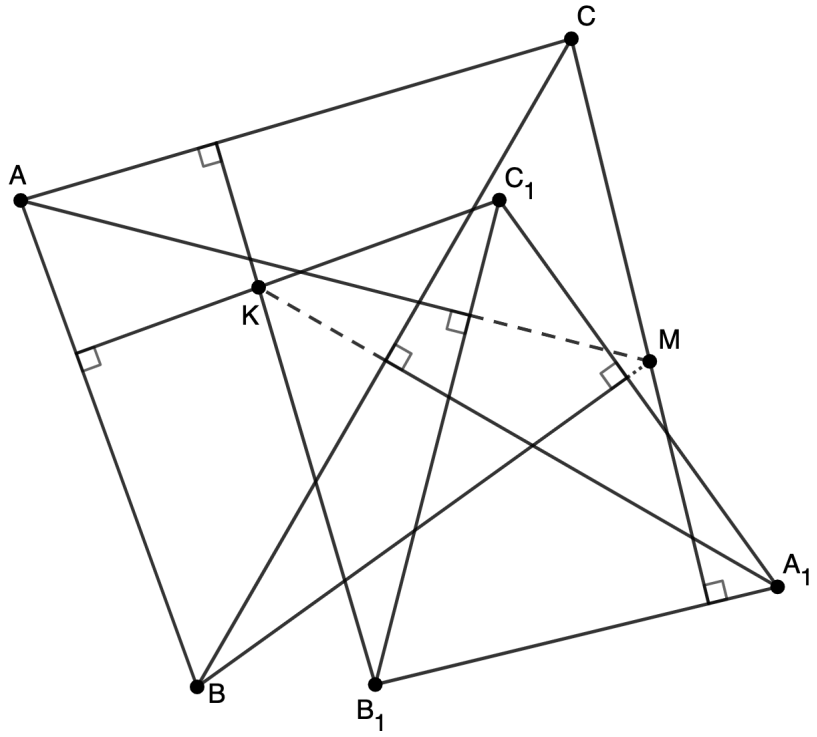


Обощенная теорема Карно Перпендикуляры, опущенные из трех точек A_1, B_1, C_1 на стороны $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

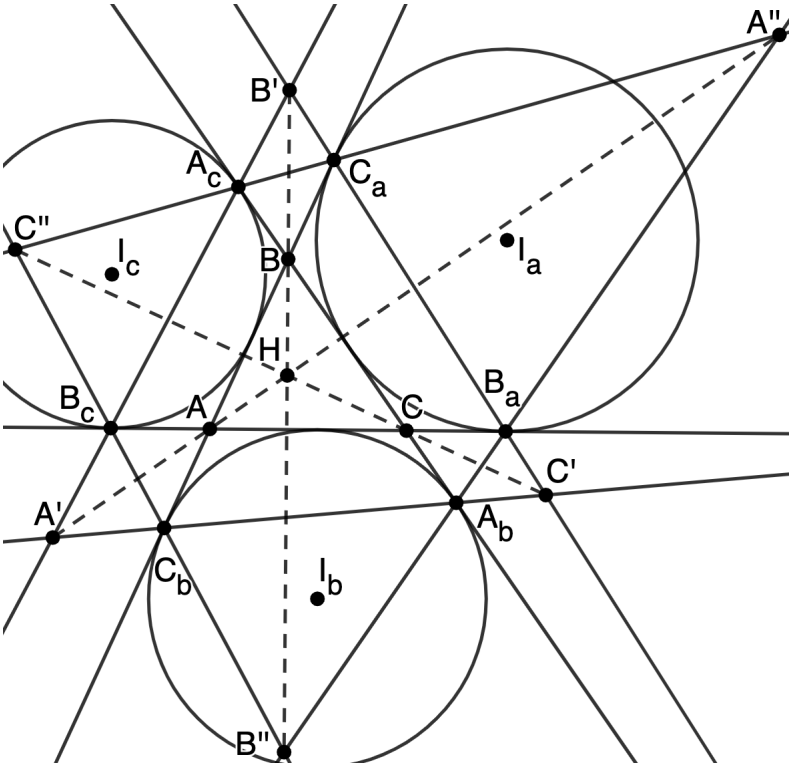
$$AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = BC_1^2 + CA_1^2 + AB_1^2$$



Теорема Штейнера Рассмотрим два треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Теорема гласит, что если перпендикуляры из точек A_1, B_1, C_1 на стороны $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры из точек A, B, C на стороны $\triangle A_1B_1C_1$ также пересекаются в одной точке.



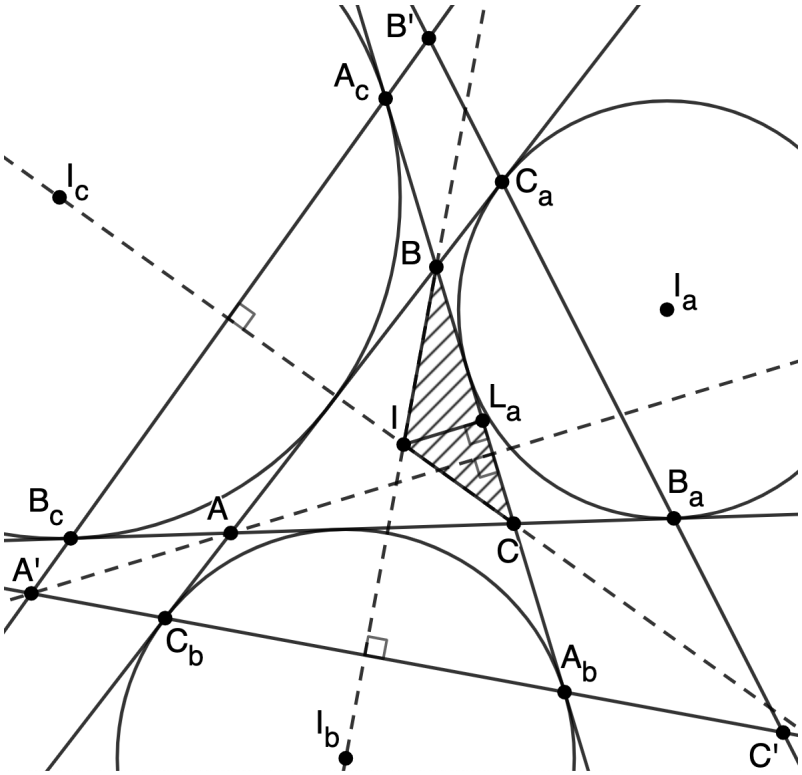
Определение Назовем треугольники из теоремы Штейнера *ортологичными*, то есть *ортологичные треугольники* — это треугольники такие, что перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на стороны другого пересекаются в одной точке, при этом точки пересечения этих перпендикуляров называют *центрами ортологии* (точки K и M на рис.)



Задача Пусть точка B_a — точка касания вневписанной окружности, противоположной точке A с прямой AC. Аналогично определим точки C_a, A_b, C_b, A_c, B_c.

а) Пусть прямые A_cB_c и A_bC_b пересекаются в точке A'. Аналогично определим B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в ортоцентре треугольника $\triangle ABC$.

б) Пусть прямые A_cC_a и A_bB_a пересекаются в точке A''. Аналогично определим B'' и C''. Докажите, что прямые AA'', BB'' и CC'' также пересекаются в ортоцентре треугольника $\triangle ABC$.



Доказательство

а) Пусть I — инцентр $\triangle ABC$, а L_a — точка касания вписанной окружности с BC.

Пусть p — полупериметр $\triangle ABC$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Известно, что $A_cB_c \perp CI$ и $A_bC_b \perp BI$.

Применим обобщенную теорему Карно к $\triangle BIC$ и точкам A, A_b, A_c. Тогда A_cB_c, A_bC_b, высота $\triangle ABC$ из A пересекаются в одной точке (A') тогда и только тогда, когда

$$AB^2 + A_bI^2 + A_cC^2 = AC^2 + A_bB^2 + A_cI^2$$

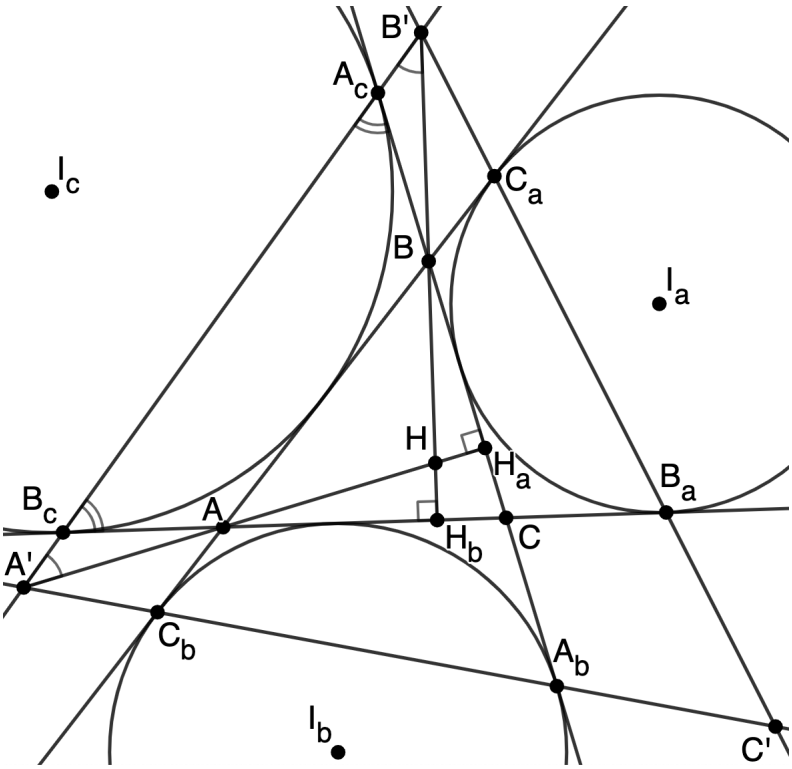
$A_bB^2 = p^2 = A_cC^2$. Значит, осталось доказать, что

$$c^2 - b^2 = A_cI^2 - A_bI^2$$

Так как прямые IL_a и A_cA_b перпендикулярны: $A_cI^2 - A_bI^2 = A_cL_a^2 - A_bL_a^2 = (A_cB + BL_a)^2 - (A_bC + CL_a)^2 = (p - a + p - b)^2 - (p - a + p - c)^2 = c^2 - b^2$

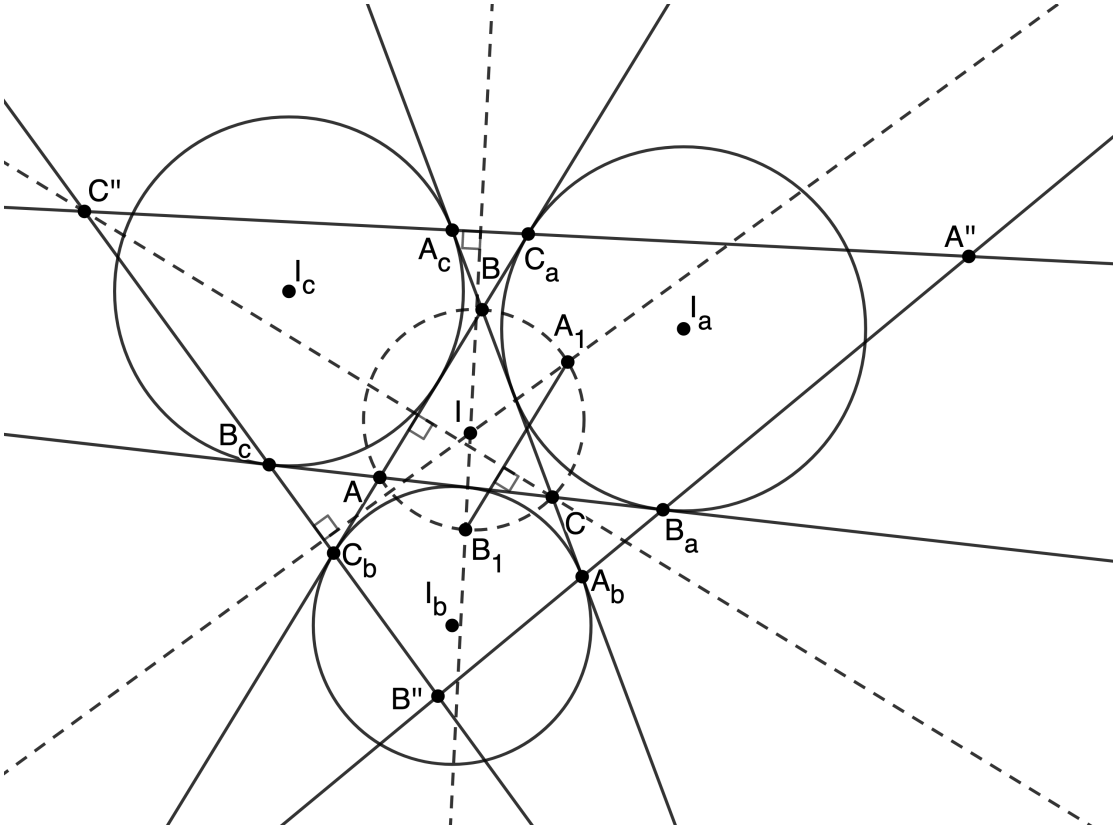
Это значит, что высота $\triangle ABC$ из A проходит через A', то есть ортоцентр H лежит на AA'. Аналогично доказывается, что H лежит на BB' и CC', следовательно AA', BB' и CC' пересекаются в ортоцентре $\triangle ABC$, ч.т.д.

Интересный факт Ортоцентр H $\triangle ABC$ явлется центром описанной окружности $\triangle A'B'C'$. Докажем его.



Пусть $\angle B'A'H = \alpha$, тогда $\angle A'A_cH_a = 90^\circ - \alpha$. Так как $A_cC = B_cC$ как отрезки касательных, то $\triangle A_cB_cC$ — равнобедренный, а значит $\angle B'B_cH_b = \angle A'A_cH_a = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, $\angle A'B'H = 90^\circ - \angle B'B_cH_b = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, то есть $\angle A'B'H = \angle B'A'H$. Значит, $\triangle A'B'H$ — равнобедренный, следовательно, $A'H = B'H$.

Аналогично можно доказать, что $A'H = C'H$, а это значит, что H — центр описанной окружности $\triangle A'B'C'$.

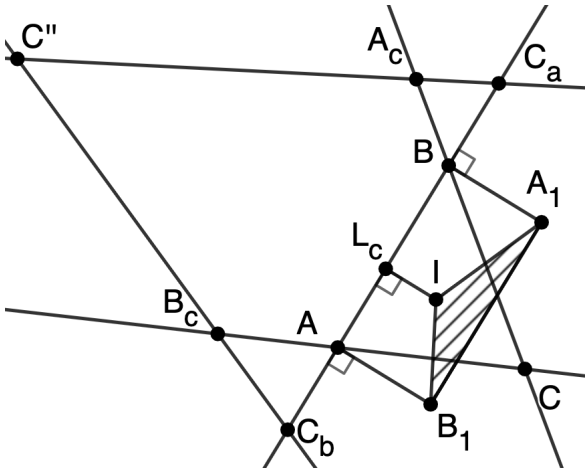


б) Пусть A_1 — точка, диаметрально противоположная точке A на описанной окружности $\triangle ABC$. Аналогично определим B_1 и C_1. Пусть I — инцентр $\triangle ABC$.

Докажем, что $IA_1 \perp B_cC_b$. Из пункта а следует, что $\triangle AC_bB_c$ и $\triangle IBC$ ортологичны. Перпендикуляры из C к AB_c и из B к AC_b пересекаются в A_1. Значит, и перпендикуляр из I к B_cC_b проходит через A_1, то есть $IA_1 \perp B_cC_b$. ч.т.д.

Аналогично доказывается, что $IB_1 \perp A_cC_a$. Теперь применим обобщенную теорему Карно к $\triangle IA_1B_1$ и точкам C, C_a, C_b. Это решит задачу, ведь перпендикуляр из C_b на IA_1 — это C_bB_C, а перпендикуляр из C_a на IB_1 — это A_cC_a. Значит, центром ортологии является C''. Третий перпендикуляр — это перпендикуляр из C на A_1B_1. Так как ABA_1B_1 —прямоугольник, то этот перпендикуляр — это высота в $\triangle ABC$. Итак, осталось доказать, что:

$$CA_1^2 + IC_b^2 + C_bB_1^2 = CB_1^2 + C_aA_1^2 + IC_a^2$$



Пусть p — полупериметр $\triangle ABC$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $l = AB_1 = A_1B$.

По теореме Пифагора ($\triangle B_1AC_b$): $C_bB_1^2 = C_bA^2 + AB_1^2 = (p-c)^2 + l^2$.

Аналогично для $\triangle BA_1C_a$: $C_aA_1^2 = A_1B^2 + BC_a^2 = l^2 + (p-c)^2$. То есть, $C_aA_1^2 = C_bB_1^2$. На них можно сократить:

$$CA_1^2 + IC_b^2 = CB_1^2 + IC_a^2$$

$$IC_b^2 - IC_a^2 = CB_1^2 - CA_1^2$$

Обозначим точку касания вписанной окружности с AB L_c. Поскольку прямые IL_c и C_aC_b перпендикулярны, то $IC_b^2 - IC_a^2 = L_cC_b^2 - L_cC_a^2 = (L_cA + AC_b)^2 - (C_aB + BL_c)^2 = (p-a+p-c)^2 - (p-c+p-b)^2 = b^2 - a^2$

Так как ABA_1B_1 — прямоугольник, то $CB^2 + CB_1^2 = CA^2 + CA_1^2$. Значит, $CB_1^2 - CA_1^2 = CA^2 - CB^2 = b^2 - a^2$

Значит, равенство $IC_b^2 - IC_a^2 = CB_1^2 - CA_1^2$ верно, а значит C'' лежит на высоте $\triangle ABC$ из вершины C, а значит CC'' проходит через ортоцентр, аналогично AA'' и BB'' проходят через ортоцентр, ч.т.д.