Оценка количества непересекающихся простых путей с общими концами в графах с большим хроматическим числом

Пименов Марк, научный руководитель П.В.Бибиков

10 ноября 2024 г.

1 Введение

Раскраской графа G в k цветов называется функция $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ на множестве V вершин графа G, ставящая в соответствие каждой вершине графа G натуральное число от 1 до k. Раскраска c называется *правильной*, если для любого ребра uv верно, что $c(u) \neq c(v)$, т.е. все смежные вершины имеют разные цвета. Наконец, *хроматическим числом $\chi(G)$ графа G* называется наименьшее число k, для которого существует правильная раскраска $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

Гипотеза 1.1

Для любого графа G с $\chi(G) > n$, существует пара вершин (u, v), такая что между u и v существует n простых не пересекающихся по вершинам (кроме u и v) путей.

Понятно, что гарантировать существование большего количества путей невозможно, т.к. в K_{n+1} между любыми двумя вершинами можно выделить не более n не пересекающихся простых путей.

Без ограничения общности далее будем считать, что наш граф G связен. Так как можно отдельно провести рассуждения для каждой из компонент связности.

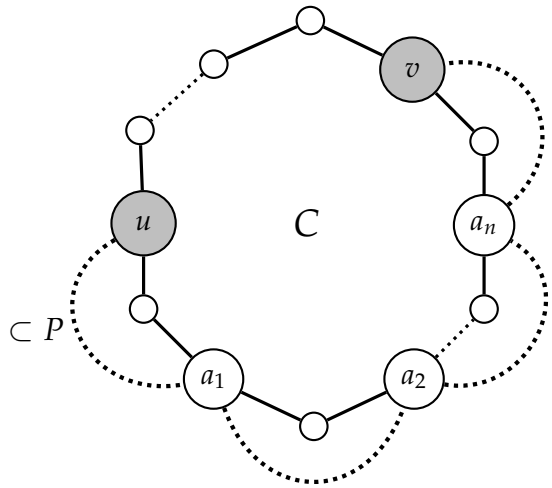
2 Проверка Гипотезы для маленьких n

Доказательство. Для $n = 1$: Если в графе нет рёбер, то его вершины правильным образом можно покрасить используя всего 1 цвет. Значит в графе есть рёбра, пусть оно соединяет вершины u, v. Тогда взяв эти две вершины и рассмотрев путь ввиде этого ребра, получим требуемое. □

Доказательство. Для $n = 2$: Пусть в графе есть простой цикл. Тогда взяв в качестве u и v, любые две вершины цикла, получим искомое, значит данный граф - дерево. Но дерево это граф правильно раскрашиваемый в 2 цвета. □

Доказательство. Для $n = 3$: При помощи индукции по количеству вершин докажем, что если такой пары вершин нет, то граф G красится в три цвета. База индукции для одной вершины очевидна. Докажем теперь шаг индукции. Рассмотрим минимальный простой цикл C в нашем графе (если в графе цикла нет, то граф G является деревом, и его вершины можно правильным образом раскрасить в два цвета) и удалим все ребра этого цикла. Так как C — минимальный цикл, после удаления его рёбер между вершинами, входящими в C, рёбер больше нет. В результате наш граф G распадется на несколько компонент связности.

Предположим, что какие-то две вершины u и v, входящие в цикл C, попали в одну и ту же компоненту связности. Рассмотрим простой путь P из вершины u в вершину v в этой компоненте связности. Выберем в этом пути все вершины, которые лежат в цикле C и выпишем их в порядке обхода: $u, a_1, a_2, \ldots, v$. Рассмотрим вершины u и a_1 (возможно, $a_1 = v$). Между ними есть простой путь, являющийся частью пути P, а также есть два пути, проходящие от u к a_1 по циклу C.



Значит, после удаления рёбер цикла C все вершины попали в разные компоненты связности. Тогда покрасим вначале вершины цикла C в три цвета, а затем удалим рёбра цикла и по предположению индукции покрасим каждую из компонент связности (это возможно, т.к. в каждой компоненте уже покрашено не более одной вершины). □

.

3 Нижние оценки

Теорема 3.1

В графе с $\chi(G) > 2^n$ существует пара вершин u и v между которыми существует хотя бы $n+1$ по вершинно не пересекающихся путей.

Доказательство. Будем доказывать данное утверждение индукцией по n. База для $n = 0, 1$ была проверена ранее. Выберем произвольную вершину v графа G. Обозначим множество всех вершин, минимальный путь от которых до v по рёбрам графа G имеет длину i за V_i, в частности $V_0 = v$, индуцированный подграф же на множестве вершин V_i обозначим за H_i. Заметим, что вершины $x \in H_i, y \in H_j$ не соединены ребром, если $|i - j| > 1$, т.к. иначе либо из x, либо из y есть путь до v короче чем из i рёбер или короче чем из j рёбер соответсвенно. Докажем, что существует такое целое положительное i, что $\chi(H_i) > 2^(n-1)$. Предположим обратное, тогда для любого целого не отрицательного i - H_i можно правильным образом раскрасить в $2^(n-1)$ цветов. Тогда правильно раскрасим все H_i для чётных i в $2^(n-1)$ цветов используя цвета с номерами от 1 до $2^(n-1)$ и используя цвета с номерами от $2^(n-1)+1$ до 2^n для нечётных i. Поймём, что вершины соединеные ребром раскрашены в разные цвета. Ребра принадлежащие H_i расскрашены корректна. Ребра соединяющие вершины из разных H, соединяют (из уже доказаного) вершины из H_i и H_{i+1} для некоторого i, но любые две такие вершины разного цвета. Но тогда мы правильно расскрасили изначальный граф в $2 \cdot n$ цветов. Противоречье. Рассмотрим тогда такое H_i, что $\chi(H_i) > 2^(n-1)$. Заметим тогда, что $i \neq 0$ (так как n хотя бы 2). Тогда в нём

есть две вершины k и l между, которыми существует n не пересекающихся по вершинам (кроме k и l путей), при том все вершины содержащиеся в данных n путях принадлежат H_i. Рассмотрим кратчайшие пути от k и l до v. Данные пути не содержат никаких вершин из H_i, кроме самих k и l. Найдём такое максимальное j, что оба пути содержат общую вершину m из H_j. Такая существует, ведь оба пути имеют общую вершину v. Тогда рассмотрим объединение двух путей из k в m и из m в l. Этот путь простой, а также он не пересекается не с одним из n до этого выделенных путей между k и l. Тогда мы нашли $n+1$ путь между k и l. Ч.Т.Д.

$\square$