Насколько часто два бегуна бывают одиноки

Сюкрин Е. А.
Под руководством Ахунжанова Р. К.
Учителя: Берёзкин В. А., Буланкина В. В., Ланин О. Ю.

2024

Определим множество T_r как $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}([r;1-r]+m)$ для $r\in\mathbb{Q}\cap\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

***Гипотеза* 1.** *Пусть v_1 и v_2 взаимно простые целые положительные числа, $r\in\mathbb{Q}\cap\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\{rv_1\}\le\{rv_2\}$, $\lambda_-=\min\{\{rv_1\},1-\{rv_2\}\}$ и $\lambda_+=\max\{\{rv_1\},1-\{rv_2\}\}$, тогда:*

$$\left|\frac{1}{v_1}T_r\cap\frac{1}{v_2}T_r\cap[0;1]\right|=(1-2r)^2+\frac{2\lambda_-(2\lambda_+-1)}{v_1v_2}$$

Пусть a и b взаимно простые целые положительные числа, p и q тоже взаимно простые целые положительные числа, обозначим $r=\dfrac{p}{q}<\dfrac{1}{2}$.

***Гипотеза* 2.** *Пусть $\{ra\}\le\{rb\}$. Тогда количество целых n на отрезке $[1;abq]$, для которых справедливо*

$$\begin{cases} n\in[pa+1;(q-p)a] \mod qa & (1)\\ n\in[pb+1;(q-p)b] \mod qb & (2)\end{cases}$$

равно

$$abq\left((1-2r)^2+\frac{2\lambda_-(2\lambda_+-1)}{ab}\right),$$

где $\lambda_-=\min\{\{ra\},1-\{rb\}\}$ и $\lambda_+=\max\{\{ra\},1-\{rb\}\}$.

***Лемма* 1.** *Если a,b,d целые и НОД$(a,b)=m$, то*
$\{d,d+a,\dots,d+a(\frac{b}{m}-1)\}\equiv\{d,d+m,\dots,d+m(\frac{b}{m}-1)\} \mod b$.

Лемма 1 является общеизвестной.

***Лемма* 2.** *Для любого целого $d\in[1;q(b-1)+1]$ количество целых n на отрезке $[1;abq]$, для которых справедливо*

$$\begin{cases} n\in[pa+1;(q-p)a] \mod qa & (1)\\ n\in[d;d+q-1] \mod qb & (2)\end{cases}$$

равно $(q-2p)a$.

Доказательство *Леммы 2*

Множество чисел на отрезке $[1; abq]$, удовлетворяющих условию (2), равно $Ж = \bigcup_{i=0}^{q-1}\{d+i, d+i+qb, \ldots, d+i+qb(a-1)\}$.
Из *Леммы 1* $\{d, d+qb, \ldots, d+qb(a-1)\} \equiv \{d, d+q, \ldots, d+q(a-1)\} \mod qa$. Т.е. количество чисел на отрезке $[1; abq]$, дающих остаток d по модулю qb, равно количеству чисел на отрезке $[1; qa]$, дающих остаток d по модулю q.
Значит количество чисел на отрезке $[1; abq]$, дающих остатки $d, d+1, \ldots, d+q-1$ по модулю qb, равно количеству чисел на отрезке $[1; qa]$, дающих остатки $d, d+1, \ldots, d+q-1 \equiv 0, 1, \ldots, q-1$ по модулю q, следовательно $Ж \equiv \{1, 2, \ldots, qa\} \mod qa$. Среди чисел $1, 2, \ldots, qa$ удовлетворяют условию (1) ровно $(q-2p)a$, это числа: $pa+1, pa+2, \ldots, (q-p)a$. Тогда и в $Ж$ ровно $(q-2p)a$ чисел, удовлетворяющих условию (1). **ч.т.д.**

Гипотеза 3. *Обозначим $M = \frac{q}{2}\{(1-2r)b\}$, пусть $\{ra\} \le \{rb\}$. Тогда количество целых n на отрезке $[1; abq]$, для которых справедливо*

$$\begin{cases} n \in [pa+1; (q-p)a] \mod qa & (1) \\ n \in [pb+1; pb+M] \mod qb & (2) \end{cases}$$

равно $M(1-2r)a + q\lambda_-(2\lambda_+ - 1)$.

Набросок доказательства *Гипотезы 3*

При $\{rb\} \ge \frac{1}{2}$ справедливо $q - q\{rb\} = \frac{q\{(1-2r)b\}}{2}$, в ином случае $q - q\{rb\} = \frac{q\{(1-2r)b\}}{2} + \frac{q}{2}$, тогда $M + q\{rb\} = \begin{cases} q & \{rb\} \ge \frac{1}{2} \\ \frac{q}{2} & \{rb\} < \frac{1}{2} \end{cases}$

Множество чисел на отрезке $[1; abq]$, удовлетворяющих условию (2), равно $G = \bigcup_{i=1}^{M}\{pb+i, pb+i+qb, \ldots, pb+i+qb(a-1)\}$. Из *Леммы 1* следует $G \equiv \bigcup_{i=1}^{M}\{pb+i, pb+i+q, \ldots, pb+i+q(a-1)\} \mod qa$. Заметим, что множество $G - q$ совпадает с множеством G по модулю qa, значит $G \equiv \bigcup_{i=1}^{M}\{q\{rb\}+i, q\{rb\}+i+q, \ldots, q\{rb\}+i+q(a-1)\} \mod qa$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\{ra\} \ge 1-\{rb\}$. Из условия $\{ra\} \le \{rb\} \Leftrightarrow 1-\{rb\} \le 1-\{ra\}$ и $\{rb\} \ge \frac{1}{2}$. Тогда $q\{rb\}+M = q$ и $G \equiv \bigcup_{i=1}^{M}\{q\{rb\}+M+1-i, q\{rb\}+M+1-i+q, \ldots, q\{rb\}+M$
$\bigcup_{i=1}^{q-q\{rb\}}\{q+1-i, q+1-i+q, \ldots, q+1-i+q(a-1)\} \mod qa$. Элементы $q+1-i, q+1-i+q, \ldots, q+1-i+pa-q\{ra\}-q \le q+1-1+pa-q\{ra\}-q \le pa$, а элементы $(q-p)a+q\{ra\}+1-i, (q-p)a+q\{ra\}+1-i+q, \ldots, q+1-i+q(a-1) \ge (q-p)a+q\{ra\}+1-q+q\{rb\} > (q-p)a$, т.е. они не удовлетворяют условию (1). А для остальных элементов верно: $pa+1 = q+1-q+q\{rb\}+pa-q\{ra\} \le$

$q+1-i+pa-q\{ra\},\ldots,(q-p)a+q\{ra\}+1-i-q \le (q-p)a+q\{ra\}+1-1-q \le (q-p)a$, значит для них выполняется условие (1), а их $\frac{1}{q}(q-q\{rb\})(((q-p)a+q\{ra\}+1-i-q)-(q+1-i+pa-q\{ra\})+q) = (1-\{rb\})((q-2p)a+2q\{ra\}-q)$. Получаем количество чисел, удовлетворяющих (1) и (2):

$$(1-\{rb\})((q-2p)a+2q\{ra\}-q) = ((q-2p)a+2q\{ra\}-q)-\{rb\}((q-2p)a+2q\{ra\}-q) =$$
$$= (q-q\{rb\})(1-2r)a+q(2\{ra\}-1)(1-\{rb\}) = M(1-2r)a+q(2\{ra\}-1)(1-\{rb\})$$

Теперь случай, когда $\{ra\} \le 1-\{rb\}$. Из условия $1-\{rb\} \le 1-\{ra\}$ из чего следует, что $\{ra\} \le \frac{1}{2}$. Элементы $q\{rb\}+i, q\{rb\}+i+q,\ldots,q\{rb\}+i+pa-q\{ra\}-q \le q\{rb\}+M+pa-q\{ra\}-q \le q+pa-q\{ra\}-q \le pa$, а элементы $q\{rb\}+i+(q-p)a+q\{ra\}, q\{rb\}+i+(q-p)a+q\{ra\}+q,\ldots,q\{rb\}+i+q(a-1) \ge (q-p)a+q\{ra\}+q\{rb\}+1 > (q-p)a$, т.е. они не удовлетворяют условию (1). Для некоторых элементов верно: $pa+1 \le 1+q\{rb\}+pa-q\{ra\} \le q\{rb\}+i+pa-q\{ra\},\ldots,q\{rb\}+i+(q-p)a+q\{ra\}-2q \le (q-p)a+q\{ra\}+q\{rb\}+M-2q \le (q-p)a+q\{ra\}+q-2q < (q-p)a$, значит для них выполняется условие (1), а их $\frac{1}{q}M((q\{rb\}+i+(q-p)a+q\{ra\}-2q)-(q\{rb\}+i+pa-q\{ra\})+q) = \frac{1}{q}M((q-2p)a+2q\{ra\}-q)$. Осталось что-то понять про элементы $q\{rb\}+i+(q-p)a+q\{ra\}-q$. Ну тут понятно, что при $i \in [1; q-q\{rb\}-q\{ra\}] \cap [1;M]$ элементы удовлетворяют условию (1), иначе - нет. Покажем, что если $q\{rb\} \le \frac{1}{2}$, то $M \le q-q\{rb\}-q\{ra\}$: $\frac{q}{2}\{(1-2r)b\} \le^? q-q\{rb\}-q\{ra\} \Leftrightarrow 1-2\{rb\} \le^? 2-2\{rb\}-2\{ra\} \Leftrightarrow \{ra\} \le^? \frac{1}{2}$, что верно. Теперь покажем, что если $q\{rb\} \ge \frac{1}{2}$, то $M \ge q-q\{rb\}-q\{ra\}$: $\frac{q}{2}\{(1-2r)b\} \ge^? q-q\{rb\}-q\{ra\} \Leftrightarrow 2-2\{rb\} \ge^? 2-2\{rb\}-2\{ra\} \Leftrightarrow \{ra\} \ge 0$, что тоже верно. Получаем количество чисел, удовлетворяющих (1) и (2):

$\{rb\} \ge \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{q}M((q-2p)a+2q\{ra\}-q)+(q-q\{rb\}-q\{ra\}) = M(1-2r)a+\{(1-2r)b\}(2q\{ra\}-q)+$$
$$+(q-q\{rb\}-q\{ra\}) = M(1-2r)a+(1-\{rb\})(2q\{ra\}-\cancel{q})+(\cancel{q-q\{rb\}}-q\{ra\}) =$$
$$= M(1-2r)a+q\{ra\}(1-2\{rb\})$$

$\{rb\} \le \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{q}M((q-2p)a+2q\{ra\}-q)+M = M(1-2r)a+q\{ra\}\{(1-2r)b\} = M(1-2r)a+q\{ra\}(1-2\{rb\})$$

Объединяя:

$$\begin{cases} M(1-2r)a+q(2\{ra\}-1)(1-\{rb\}) & \{ra\}+\{rb\} \ge 1 \\ M(1-2r)a+q\{ra\}(1-2\{rb\}) & \{ra\}+\{rb\} \le 1 \end{cases} = M(1-2r)a+q\lambda_-(2\lambda_+-1)$$

ч.т.д.

Набросок доказательства *Гипотезы 2*

Разобьём остатки по модулю qb, на $\lfloor(1-2r)b\rfloor$ блоков: $(pb+M;pb+M+q]\cap\mathbb{Z}, (pb+M+q;pb+M+2q]\cap\mathbb{Z},\ldots,((q-p)b-M-q;(q-p)b-M]\cap\mathbb{Z}$. По *Лемме 2* среди чисел на отрезке $[1;abq]$ дающих остатки по модулю qb из любого блока ровно $(q-2p)a$ удовлетворяющих условию (1). Остатки, не вошедшие в блоки, будут равны $pb+1, pb+2,\ldots,pb+\dfrac{q\{(1-2r)b\}}{2}$ и $(q-p)b, (q-p)b-1,\ldots,(q-p)b-\dfrac{q\{(1-2r)b\}}{2}+1$. Из симметрии понятно, что количество чисел на отрезке $[0;abq]$, удовлетворяющих условию (1) и дающих остаток из набора $pb+1, pb+2,\ldots,pb+\dfrac{q\{(1-2r)b\}}{2}$, равно количеству чисел, удовлетворяющих условию (1) и дающих остаток из набора $(q-p)b, (q-p)b-1,\ldots,(q-p)b-\dfrac{q\{(1-2r)b\}}{2}+1$, и равно $M(1-2r)a+q\lambda_-(2\lambda_+-1)$, по *Гипотезе 2*. Получаем:

$$\left\lfloor\frac{(q-2p)b}{q}\right\rfloor(q-2p)a+2(M(1-2r)a+q\lambda_-(2\lambda_+-1))=abq\left((1-2r)^2+\frac{2\lambda_-(2\lambda_+-1)}{ab}\right)$$

ч.т.д.

Набросок доказательства *Гипотезы 1*

$\left|\dfrac{1}{v_1}T_r\cap\dfrac{1}{v_2}T_r\cap[0;1]\right|=\dfrac{1}{qv_1v_2}\left|qv_1T_r\cap qv_2T_r\cap[0;qv_1v_2]\right|$. Сделаем биекцию между отрезками вида $[i-1;i], i\in\mathbb{N}$ и натуральными числами следующим образом: сопоставим отрезку $[i-1;i]$ число i. Тогда множество qv_1T_r смежно множеству целых чисел в множестве $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}([pv_1+1;(q-p)v_1]+mqv_1)$, а множество qv_2T_r смежно множеству целых чисел в множестве $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}([pv_2+1;(q-p)v_2]+mqv_2)$. Т.е. множество qv_1T_r смежно с множеством натуральных чисел, дающих остатки из отрезка $[pv_1+1;(q-p)v_1] \mod qa$, аналогично про qv_2T_r. Из *Гипотезы 2* пересечение таких множеств на отрезке $[1;qv_1v_2]$ равно $qv_1v_2\left((1-2r)^2+\dfrac{2\lambda_-(2\lambda_+-1)}{v_1v_2}\right)$ где $\lambda_-=\min\{\{rv_1\},1-\{rv_2\}\}$ и $\lambda_+=\max\{\{rv_1\},1-\{rv_2\}\}$. Тогда $\left|\dfrac{1}{v_1}T_r\cap\dfrac{1}{v_2}T_r\cap[0;1]\right|=(1-2r)^2+\dfrac{2\lambda_-(2\lambda_+-1)}{v_1v_2}$. **ч.т.д.**