К многомерной комбинаторной геометрии*

представляли Е. Коган, В. Ретинский, Е. Рябов[†]и А. Скопенков[‡]

Содержание

Введение

Многие области знания и техники — прежде всего математика, программирование и физика — часто работают с многомерным пространством. Решение нижеприведенных задач позволит освоить базовые навыки такой работы. Вы научитесь как развивать пространственное воображение и интуицию, так и проверять их строгими рассуждениями. Это полезно для последующего изучения компьютерной графики и необходимой для нее базы из линейной алгебры и геометрии.

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму (см. задачи). За счет этого проект доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для изучения проекта не требуется предварительных знаний по стереометрии. Полезны пространственное воображение и умение решать системы линейных уравнений (см. задачу 1.2).

В этом тексте обобщается следующий результат (см. задачи S, D, SD, и §3- §5).

Теорема Радона для плоскости. *Для любых 4 точек на плоскости либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на две пары так, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.*

S = same size. Из любых 5 точек плоскости можно выбрать такие две непересекающиеся пары точек, что отрезки, образованные этими парами, пересекаются.

*Благодарим Д. Елисеева за перевод части текста и И. Жильцова, А. Рябичева и А. Чернятина за полезные замечания.

[†]Е. Коган, В. Ретинский, Е. Рябов — Высшая Школа Экономики, Москва.

[‡]`https://users.mccme.ru/skopenko`. Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет.

В этом тексте под треугольником Δ подразумевается часть плоскости, ограниченная его контуром $\partial\Delta$ (т.е. объединением сторон). Эта часть может быть отрезком.

D = dimension. Для любых 5 точек в пространстве либо одна из них лежит внутри тетраэдра, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на пару и тройку так, что отрезок, соединяющий точки в паре, пересекает треугольник, образованный точками в тройке.

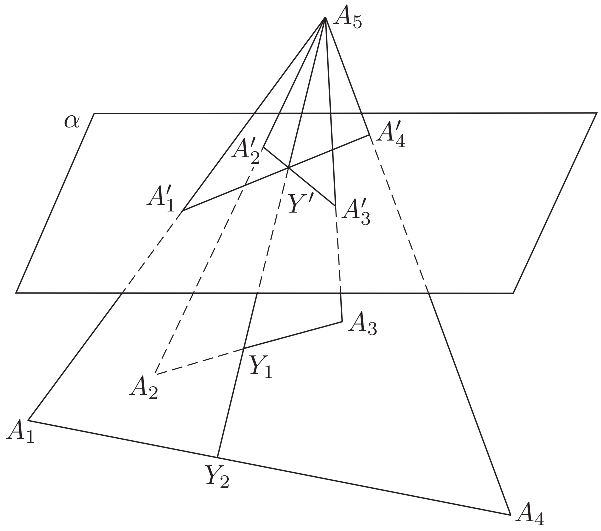

Рис. 1: Указание к задаче D (к теореме Радона для пространства)

Теорема SD: теорема Радона для пространства о множествах почти одинакового размера.

(3) Из любых 6 точек пространства можно выбрать такие непересекающиеся пару и тройку точек, что отрезок, соединяющий точки пары, пересекает треугольник, образованный тройкой.

(4) Из любых 7 точек четырехмерного пространства можно выбрать две непересекающиеся тройки точек, для которых соответствующие треугольники пересекаются.

Определение четырехмерного пространства приведено в §1. Теорема SD(4) выводится из нижеприведенных теоремы QS'D и утверждения 3.7.c.

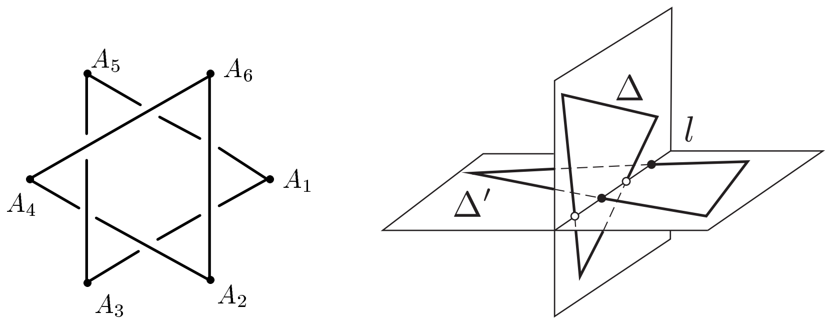

Рис. 2: Зацепленные треугольники и зацепленные пары точек

Пусть Δ и Δ' — два невырожденных треугольника в пространстве, контуры которых не пересекаются, и никакие четыре из вершин которых не лежат в одной плоскости. Треугольники называются **зацепленными**, если контур первого пересекает второй ровно в одной точке.

Теорема S'D: теорема Радона для пространства о зацепленности множеств одинакового размера; линейная теорема Конвея-Гордона-Закса, 1981-1983.

Никакие 4 *из данных* 6 *точек в пространстве не лежат в одной плоскости. Тогда существуют два зацепленных треугольника с вершинами в данных* 6 *точках.*

Доказательство использует утверждение QS из §3; получается более сильный результат — теорема QS'D.

Другие «олимпиадные» задачи — теорема D(d) в §1, 2.3.c, 2.5.b, 2.7.b, 3.2, 3.6.(4'-3). Нерешенные задачи — 3.6.(4-3),(4-2),(4'-2) и в §4, §5. В §5 есть простое доказательство одного из шагов в недавнем построении контрпримера к топологической гипотезе Тверберга [Sk16].

Рекомендации участникам.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если задача выделена словом «теорема» («лемма», «следствие» и т. д.), то её утверждение более важное. Как правило, мы приводим (в виде задачи) *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* его *доказательством.* В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться последующие задачи. Мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Вообще, если Вы застряли на какой-то задаче, попробуйте перейти к следующим, они могут оказаться полезными. *Замечания* и задачи, помеченные звездочками, формально не используются в дальнейшем. В тексте определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы затем было проще их найти.

Участник (или команда), решающий задачи проекта, получает «боб» за каждое **письменное решение для пользователя** (не являющееся просто ответом), оцененное в «+» или «+.». См. рекомендации `https://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf`. Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в системе TEX. У жюри бесконечно много бобов. У каждой участника (или команды) в начале 1 боб. Решения можно сдавать и **устно**, и **письменно для разработчика**, отдавая один боб за каждые пять попыток (неважно, удачных или нет).

1 Как работать с четырехмерным пространством?

В задачах 1.1, 1.4.abc, 1.5.abcd, 1.8.cd и 1.9.be на ЛКТГ достаточно привести правильный ответ. (Задача 1.8.a разобрана.)

1.1. Сколько точек может быть в пересечении прямой и плоскости в трехмерном пространстве?

1.2. Сколько решений может быть у системы линейных уравнений

(a) 2×2; (b) 2×3 (2 уравнения, 3 переменных); (c) 3×2?

Определим

• *прямую* как множество действительных чисел;

• *плоскость* $\mathbb{R}^2$ как множество всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x и y;

• *трехмерное пространство* $\mathbb{R}^3$ как множество всех упорядоченных троек (x, y, z) действительных чисел;

• *четырехмерное пространство* $\mathbb{R}^4$ как множество всех упорядоченных четверок (x, y, z, t) действительных чисел.

Определение *d-мерного пространства* $\mathbb{R}^d$ для $d > 4$ дается аналогично.

В этом тексте «трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$» коротко называется «пространством».

Напутствие. Обычно только простейшие свойства в планиметрии и стереометрии выводятся из аналитических определений (или же принимаются за аксиомы). Более сложные свойства могут быть выведены из простейших «синтетически» (т.е., как в школьной геометрии, без использования аналитических определений). Часто бывает удобно свести двумерную задачу к одномерной (т.е., к задаче на прямой), а трехмерную задачу – к двумерной. Аналогично, лучший подход к четырехмерным задачам — это аналогия с трехмерными задачами, или сведение к ним.

Для точек $A = (x_1, y_1, z_1, t_1), B = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\lambda A := (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1) \quad \text{и} \quad A + B := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

1.3. Разбивает ли двумерная плоскость четырехмерное пространство на куски? Т.е. для любых ли двух точек, не лежащих в двумерной плоскости $x = y = 0$ четырехмерного пространства (x, y, z, t), существует ломаная, соединяющая эти точки и не пересекающая плоскость?

Для точек $A, B \in \mathbb{R}^4$ *отрезком* AB называется множество $\{\lambda A + (1-\lambda)B \ : \ \lambda \in [0, 1]\}$. *Ломаной* $A_1 A_2 \ldots A_n$ называется объединение отрезков $A_i A_{i+1}$ по всем $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Указание. Для точек $A = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ и B, не лежащих на плоскости $x = y = 0$, определим точки

$$A_x = A + (1, 0, 0, 0) = (x_0 + 1, y_0, z_0, t_0) \quad \text{и} \quad A_y = A + (0, 1, 0, 0) = (x_0, y_0 + 1, z_0, t_0).$$

Докажите, что хотя бы одна из ломаных AB, AA_xB и AA_yB не пересекает плоскость $x = y = 0$.

1.4. Чем является пересечение *двумерной сферы*

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

(a) прямая $x = y = 0$, содержащая центр сферы;

(b) плоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;

(c) пересечение неотрицательного октанта в $\mathbb{R}^3$ и объединения двумерных координатных плоскостей, то есть множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \text{ и } xyz = 0\}.$$

1.5. Чем является пересечение *трехмерной сферы*

$$S^3 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

(a) прямая $x = y = z = 0$, содержащая центр сферы;

(b) плоскость $x = y = 0$, содержащая центр сферы;

(c) (трехмерная) гиперплоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;

(d) пересечение неотрицательной «одной шестнадцатой» $\mathbb{R}^4$ и объединения двумерных координатных плоскостей, то есть множество

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :$$

$$: \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ t \geq 0 \text{ и хотя бы два из четырех чисел } x, y, z, t \text{ равны нулю}\}.$$

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется **прямой**, если L не является точкой и найдутся точки $A, B \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt\ :\ t \in \mathbb{R}\}$.

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется (двумерной) **плоскостью**, если L не является ни точкой, ни прямой, и найдутся точки $A, B, C \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt + Cu\ :\ t, u \in \mathbb{R}\}$.

Ранее уже было введено определение прямой. Однако далее под прямой подразумевается другое — подмножество в $\mathbb{R}^d$, определение которого аналогично вышеприведенному. Аналогичное замечание справедливо и для плоскости.

1.6. Напишите аналогичное определение (трехмерной) **гиперплоскости** в $\mathbb{R}^4$.

В решениях следующих задач Вы можете использовать без доказательств результаты задачи 1.7, а также все строго сформулированные Вами верные факты о решениях систем линейных уравнений.

1.7. * (a) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \emptyset$, $L \neq \mathbb{R}^4$ и существуют $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, такие что

$$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ :\ ax + by + cz + dt = e\}.$$

(b) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является плоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \emptyset$, $L \neq \mathbb{R}^4$, L не является гиперплоскостью и существуют $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ :\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = e_1,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = e_2\}.$$

(c) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для прямой в $\mathbb{R}^4$.

1.8. Чем может быть пересечение в $\mathbb{R}^4$:

(a) прямой и гиперплоскости? (b) прямой и плоскости?

(c) плоскости и гиперплоскости? (d) двух гиперплоскостей? (e) двух плоскостей?

Подсказка к (a). Ответ. Пустое множество, точка, прямая.

Примеры. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 1$ по пустому множеству. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $t = 0$ по точке. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 0$ по прямой.

Доказательство того, что другие пересечения невозможны. Достаточно доказать, что если пересечение в $\mathbb{R}^4$ прямой l и гиперплоскости содержит хотя бы две точки, то пересечение совпадает с прямой l. Это верно, так как *для любых двух точек существует единственная прямая, содержащая обе эти точки.* Последний факт легко выводится из определения прямой. (Во многих других изложениях этот факт принимается за аксиому.)

1.9. Для различных точек $X, Y \in \mathbb{R}^4$ определим *прямую* XY как $\{X + (Y - X)t = (1-t)X + tY\ :\ t \in \mathbb{R}\}$. Для точек $X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$, не лежащих на одной прямой, определим *плоскость* XYZ как

$$\{X + (Y - X)t + (Z - X)u = (1 - t - u)X + tY + uZ\ :\ t, u \in \mathbb{R}\}.$$

Никакие пять из восьми точек 1,2,3,4,5,6,7,8 в $\mathbb{R}^4$ не лежат на одной гиперплоскости. Чем может быть пересечение:

(b) прямой 12 и плоскости 567? (d) гиперплоскостей 1234 и 5678?

(e) плоскостей 123 и 567?

Выпуклой оболочкой конечного набора точек $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d$ называется множество

$$\langle A_1, \ldots, A_n \rangle := \{\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n\ :\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1\}.$$

1.10. Выпуклая оболочка конечного набора точек на плоскости — наименьший (по включению, или по площади) выпуклый многоугольник, их содержащий.

Теорема D(d): теорема Радона.

Любые $d+2$ точки d-мерного пространства можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

2 Леммы о четности

Лемма 2.1 (о четности)**.** *Если из 6 вершин двух треугольников на плоскости никакие 3 не лежат на прямой, то контуры этих треугольников пересекаются в четном числе точек.*

Доказательство. Контур треугольника разбивает плоскость.[1] Ломаная, составленная из сторон одного треугольника заходит *внутрь* другого треугольника столько же раз, сколько выходит *наружу*. □

Несколько точек плоскости **находятся в общем положении**, если никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

2.2. (a) Находятся ли все точки окружности в общем положении?

(b) Если вершины двух плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в конечном числе точек.

Указание: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2.3. (a) Плоскость нельзя представить в виде объединения конечного числа прямых.

(b) Существуют ли 100 точек общего положения на плоскости?

(c) На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 желтых. Тогда количество всех точек пересечения красных отрезков (т.е. отрезков, соединяющих красные точки) с желтыми отрезками четно.

Лемма 2.4 (о четности)**.** *Если никакие 4 из 7 вершин треугольника и тетраэдра в пространстве не лежат на одной плоскости, то контур треугольника пересекается с гранями тетраэдра в четном числе точек.*

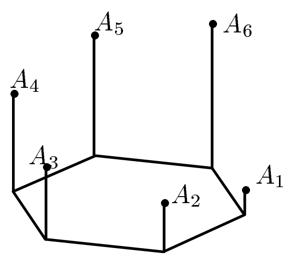

Рис. 3: Шесть точек общего положения в пространстве

Несколько точек в пространстве **находятся в общем положении**, если никакие 4 из них не лежат на одной плоскости, и никакие отрезок, треугольник и треугольник, натянутые на них, не имеют общей внутренней точки. Пример шести точек общего положения изображен на рис. 3.

[1]Этот факт, в отличие от *кусочно-линейной теоремы Жордана* [Sk20, §1.4], доказывается без использования леммы о четности.

2.5. (a) Существуют ли 100 точек общего положения в пространстве?

(b) В пространстве имеется 17 точек общего положения: 7 красных и 10 желтых. Тогда количество всех точек пересечения красных отрезков (т.е. отрезков, соединяющих красные точки) с желтыми треугольниками четно.

Лемма 2.6 (о четности). *Если никакие 5 из 8 вершин двух тетраэдров в четырехмерном пространстве не лежат на одной гиперплоскости, тогда поверхности этих тетраэдров пересекаются в четном числе внутренних точек.*

Указание: consider the intersection of the convex hulls of the tetrahedra. Alternatively, возьмите сечение гиперплоскостью одного из тетраэдров; check the general position property before application of the Parity Lemma 2.1.

Несколько точек в четырехмерном пространстве **находятся в общем положении**, если никакие 5 из них не лежат на одной гиперплоскости, и никакие три треугольника, натянутые на них, не имеют общей внутренней точки.

2.7. (a) Существуют ли 100 точек общего положения в четырехмерном пространстве?

(b) В четырехмерном пространстве имеется 16 точек общего положения: 8 красных и 8 желтых. Назовем *красными/желтыми* двумерные треугольники, натянутые на красные/желтые точки. Тогда количество точек пересечения красных треугольников с желтыми треугольниками четно.

3 Количественные версии

Q = quantitative. Среди данных 4 точек плоскости никакие 3 не лежат на прямой. Тогда существует ровно одно их неупорядоченное разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

QS: количественная теорема Радона для плоскости о множествах одинакового размера; линейная теорема ван Кампена-Флореса для плоскости.

Среди данных 5 точек плоскости никакие 3 не лежат на прямой. Тогда количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечетно.

QD: количественная теорема Радона для пространства.

(3) Среди данных 5 точек пространства никакие 4 не лежат в одной плоскости. Тогда существует ровно одно их разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(4) Сформулируйте и докажите четырехмерный и d-мерный аналог.

Внутренностью треугольника называется его дополнение до его контура.

Теорема QSD: количественная теорема Радона для пространства о множествах почти одинакового размера.

(3) Среди данных 6 точек пространства никакие 4 не лежат в одной плоскости. Тогда количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, с (двумерными) треугольниками, натянутыми на 3 из осавшихся от отрезка четырех точек, четно.

(4) Никакие 5 *из данных* 7 *точек в четырехмерном пространстве не лежат в одной трехмерной гиперплоскости. Тогда количество точек пересечения пар внутренностей треугольников с вершинами в данных* 7 *точках нечетно.*

Теорема QSD(4) следует из нижеприведенных теоремы QS'D и утверждений 3.7.d, 3.8.b.

Свойство быть зацепленными не симметрично априори.

Лемма 3.1 (о симметрии). *Треугольники Δ и Δ' в пространстве зацеплены тогда и только тогда, когда Δ' и Δ зацеплены.*

Указание. Рассмотрите $\Delta \cap \Delta'$.

Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

3.2.

В пространстве *отрезок p ниже отрезка q (при взгляде из точки O)*, если существует точка $X \in p$, для которой отрезки OX и q пересекаются.

Лемма 3.3 (о понижении размерности). *Никакие четыре из точек $O, A_1, \ldots, A_5$ в пространстве не лежат в одной плоскости, и существует плоскость, отделяющая O от $A_1, \ldots, A_5$. Тогда треугольники OA_1A_2 и $A_3A_4A_5$ зацеплены тогда и только тогда, когда A_1A_2 ниже ровно одной стороны треугольника $A_3A_4A_5$.*

Теорема QS'D: количественная теорема Радона для пространства о зацепленности множеств одинакового размера.

Если среди 6 точек пространства никакие 4 не лежат в одной плоскости, то количество неупорядоченных пар зацепленных треугольников с вершинами в этих точках нечетно.

Теоремы SD и QSD показывают, что при переходе от размерности 2 к размерности 3 свойство существования пересечения сохраняется, в то же время четность числа пересечений изменяется. Нечетномерные аналоги SD и QSD имеют более сильную форму: теоремы S'D и QS'D.

Следующие свойства расцепленности связаны со свойствами пересечений QS, QSD.

3.4. (2) Существуют 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой и такие, что любой отрезок, соединяющий 2 из них, пересекает контур треугольника, образованного остальными 3-мя, в четном числе точек.

(2') Для любых 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, число отрезков, соединяющих 2 из них, и пересекающих контур треугольника, образованного остальными 3-мя, ровно в одной точке, четно.

Задача 3.4 означает, что каждая пара точек «расцеплена» (т.е., не «зацеплена») с треугольником, образованном остальными 3-мя. Мы не будем приводить аналогичные пояснения для свойств 3.5.3, 3.6.(4-2),(4-3) ниже.

В пространстве вместо свойства расцепленности 3.4 есть свойство зацепленности (теорема QS'D) и следующие свойства расцепленности.

3.5. (3) Существуют 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости и такие, что любой отрезок, соединяющий 2 из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного оставшимися 4-мя точками, в четном числе точек.

(3') Если никакие 4 из 6 точек пространства не лежат в одной плоскости, то количество точек пересечения отрезков, их соединяющих, с поверхностями тетраэдров, образованных остающимися 4-мя точками, четно.

Здесь можно сделать замечание, аналогичное замечанию после теоремы QSD.

Было бы интересно доказать утверждение 3.6.(4'-3), гипотезы 3.6.(4-3),(4'-2),(4-2) и их аналоги в больших размерностях. (Мы благодарны М. Танцеру за присланное нам доказательство PL версии утверждения 3.6.(4-3).)

3.6. (4'-3) Если никакие 5 из 7 точек в четырехмерном пространстве не лежат в одной гиперплоскости, то количество треугольников, образованных 3-мя из них, и пересекающих тетраэдр, образованный оставшимися 4-мя точками, ровно в одной точке, четно.

(4-3) Существуют 7 точек в четырехмерном пространстве, никакие 5 из которых не лежат в одной гиперплоскости и такие, что любой треугольник, образованный 3-мя из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного оставшимися 4-мя точками, в четном числе точек.

(4'-2) Если никакие 5 из 7 точек в четырехмерном пространстве не лежат в одной гиперплоскости, то количество точек пересечения отрезков, их соединяющих, с трехмерными поверхностями четырехмерных симплексов, образованных оставшимися 5-ю точками, четно.

(4-2) Существуют 7 точек в четырехмерном пространстве, никакие 5 из которых не лежат в одной гиперплоскости и такие, что любой отрезок, соединяющий 2 из них, пересекает поверхность четырехмерного симплекса, образованного оставшимися 5-ю точками, в четном числе точек.

3.7. (a) Пять точек на плоскости образуют два треугольника с общей вершиной O. Прямая l отделяет ее от оснований треугольников. Если пересечения прямой l с контурами треугольников чередуются вдоль прямой, то контуры треугольников имеют общую точку, отличную от O.

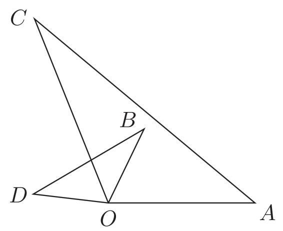

Рис. 4: Два треугольника с общей вершиной на плоскости

(b) Никакие 3 из данных 5 точек на плоскости не лежат на одной прямой. Эти 5 точек образуют два треугольника с общей вершиной. Прямая l отделяет ее от оснований треугольников. Контуры треугольников пересекаются в четном числе точек тогда и только тогда, когда пересечения прямой l с контурами треугольников чередуются вдоль прямой.

(c) Семь точек в $\mathbb{R}^4$ образуют два тетраэдра Δ и Δ' с общей вершиной O. Гиперплоскость α отделяет ее от оснований тетраэдров. Если треугольники $\alpha \cap \Delta$ и $\alpha \cap \Delta'$ зацеплены в гиперплоскости α, то поверхности тетраэдров Δ и Δ' имеют общую точку, отличную от O.

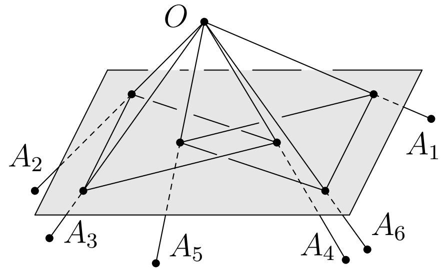

Рис. 5: Два тетраэдра в $\mathbb{R}^4$ с общей вершиной O и гиперплоскость (изображенная как плоскость в пространстве), отделяющая O от оснований тетраэдров

(d) Никакие 5 из данных 7 точек в $\mathbb{R}^4$ не лежат в одной трехмерной гиперплоскости. Эти 7 точек образуют два тетраэдра Δ и Δ' с общей вершиной. Гиперплоскость α отделяет ее от оснований тетраэдров. Тогда поверхности тетраэдров Δ и Δ' пересекаются в четном числе точек тогда и только тогда, когда треугольники $\alpha \cap \Delta$ и $\alpha \cap \Delta'$ зацеплены в гиперплоскости α.

П. (a) очевиден. П. (c) сводится к п. (a) удачным выбором сечения.

3.8. (a) Для любых точек O, A_1, A_2, A_3, A_4 общего положения на плоскости количество из теоремы QS равно сумме количеств точек пересечения внутренностей отрезков треугольников $O\Delta$ и $O\Delta'$, по всем неупорядоченным разбиениям точек A_1, A_2, A_3, A_4 на две пары Δ и Δ'.

(b) Для любых точек $O, A_1, \ldots, A_6 \in \mathbb{R}^4$ общего положения количество из теоремы QSD.4 равно сумме количеств точек пересечения внутренностей граней тетраэдров $O\Delta$ и $O\Delta'$, по всем неупорядоченным разбиениям точек $A_1, \ldots, A_6$ на две тройки Δ и Δ'.

4 Кратные версии (M)

M = multiplicity. Любые 17 точек на плоскости можно разбить на 3 множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

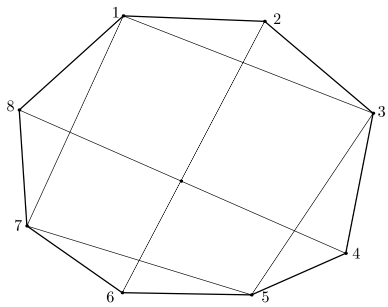

Рис. 6: Общая точка трех выпуклых оболочек

Доказательство. Вершины любого выпуклого 8-угольника на плоскости можно разбить на 3 множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку (рис. 6).

Если у выпуклой оболочки данного множества из 17 (или даже из 11) точек не менее 8 вершин, то разобьем эти восемь вершин на 3 множества как выше. Если же у нее менее 8 вершин, то обозначим через S_1 множество этих вершин. Оставшихся точек не менее 4. Поэтому их можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются. Это пересечение лежит и в выпуклой оболочке множества S_1.

Теорема 4.1 (M: r-кратная теорема Радона для плоскости; теорема Тверберга для плоскости, 1965)**.** *Любые 7 точек плоскости можно разбить на 3 множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Любые $3r-2$ точки плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Прежде, чем доказывать теоремы M и DM, рекомендуем решить задачи 4.2, 4.3, 4.4, 4.6.

4.2 (ср. с теоремой M)**.** (a) Существуют 6 точек плоскости, при любом разбиении которых на 3 множества выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

Указание. Возьмем по паре точек около каждой вершины треугольника.

(b) Существуют 7 точек плоскости, ни одна из которых не лежит ни в одном из треугольников, образованных оставшимися точками.

Указание. Возьмем вершины выпуклого 7-угольника.

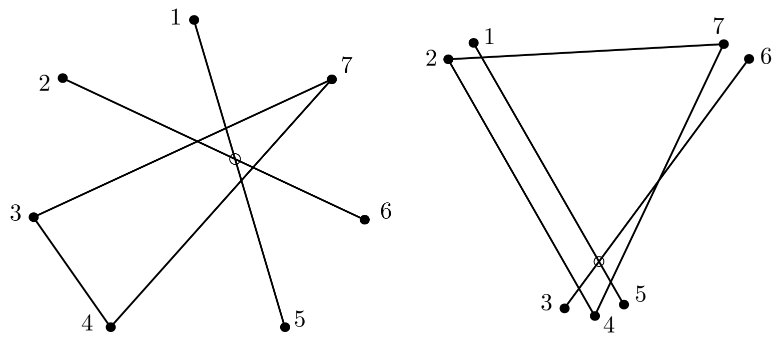

Рис. 7: Общая точка трех выпуклых оболочек

(c) Существуют 7 точек плоскости со следующим свойством. Возьмем любые два отрезка, соединяющие две непересекающиеся пары данных точек. Тогда либо эти отрезки не пересекаются, либо их точка пересечения не лежит в треугольнике, образованном тремя оставшимися точками из данных.

Указание. Возьмем вершины правильного треугольника и его центр. Добавим к взятым точкам середины отрезков, соединяющих вершины с центром.

(d) Обобщите эти примеры на r-кратный случай.

Количественная трехкратная теорема Радона для плоскости (QM) **неизвестна!**

4.3. Существуют ли 6 точек на плоскости, при любом разбиении которых на 3 множества выпуклые оболочки некоторых двух из этих множеств не пересекаются?

4.4. (a) Для вершин правильного 7-угольника число разбиений из теоремы M равно 7.

Указание. Каждое такое разбиение похоже на повернутое разбиение с рис. 7 слева.

(b) Для точек рисунка 7 справа число разбиений из теоремы M равно 4.

Указание. Это следует из того, что для каждого такого разбиения одна из выпуклых оболочек — это треугольник с первой вершиной 4, второй вершиной 1 или 2 и третьей вершиной 6 или 7.

Замечание. Отсюда вытекает, что следующая сумма имеет разную четность для двух вышеупомянутых 7-элементных множеств M_a, M_b

$$v(M_i) := \sum_{\{R_1,R_2,R_3\}\ :\ M_i=R_1\sqcup R_2\sqcup R_3} |\,\langle R_1\rangle \cap \langle R_2\rangle \cap \langle R_3\rangle\,|.$$

См. подробнее [Sk18, §2].

Теорема 4.5 (DM: r-кратная теорема Радона для пространства; теорема Тверберга для пространства, 1965)**.** *Любые $4r-3$ точки пространства можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

4.6 (ср. с теоремой DM)**.** (a) Существуют 8 точек пространства, при любом разбиении которых на 3 множества выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

(b) Существуют $4r-4$ точек пространства, при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

(c) Существуют $(r-1)(d+1)$ точек d-мерного пространства, при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

4.7. * Сформулируйте и докажите аналог задачи 4.3 для пространства.

В доказательствах теорем M и DM можно использовать без доказательства цветную теорему Каратеодори (доказательство которой не является частью этого проекта).

Теорема 4.8 (Барань; цветная теорема Каратеодори). *Пусть точка $0 \in \mathbb{R}^n$ лежит в выпуклой оболочке каждого из $n+1$ конечных множеств $M_0, M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существуют точки $m_i \in M_i$, для которых $0 \in \langle m_0, m_1, \dots, m_n \rangle$.*

Теорема 4.9 (SM: трехкратная теорема Радона для малой размерности о множествах одинакового размера; линейная теорема Саркарии, 1991). ** Из любых 11 точек пространства можно выбрать 3 попарно непересекающиеся тройки так, чтобы три треугольника, образованные этими тройками, имели общую точку.*

4.10 (ср. с теоремой SM). Существуют 10 точек пространства, из которых нельзя выбрать 3 попарно непересекающиеся тройки, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Теорема 4.11 (SDM: r-кратная теорема Радона для произвольной размерности о множествах одинакового размера; линейная теорема Саркарии-Воловикова, 1991-1996). ** Если r — степень простого, то из любых $(kr+2)(r-1)+1$ точек пространства $\mathbb{R}^{kr}$ можно выбрать такие r попарно непересекающихся наборов по $k(r-1)+1$ точке в каждом, что выпуклые оболочки этих наборов имеют общую точку.*

Верен ли аналог этой теоремы для $r = 6$, **неизвестно!**

Количественные версии (QSM), (QDM), (QSDM) **неизвестны**, даже если r — степень простого! *Версия (S'M) о трехкратной зацепленности* **неизвестна**, см. [Sk, §4].

5 Приложение: топологические версии (T)

Начнем с усиления непланарности графа K_5 — *топологической версии (ST) теоремы Радона для плоскости о множествах одинакового размера.*

Будем рассматривать такие изображения графа на плоскости, при которых ребра изображаются ломаными и допускаются самопересечения. Формализуем это пояснение для графа K_n.

Кусочно-линейным (PL) отображением $f : K_n \to \mathbb{R}^2$ графа K_n в плоскость назовем набор $\binom{n}{2}$ (незамкнутых) ломаных, попарно соединяющих некоторые n точек на плоскости. **Образом** $f(\sigma)$ **ребра** σ назовем ломаную, соответствующую ребру σ. *Образом набора ребер* назовем объединение образов ребер из набора.

Теорема 5.1 (ST). *Для любого PL отображения графа K_5 в плоскость найдутся два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

Теорема (ST) выводится из ее количественной версии (QST): при «случайном» изображении графа K_5 на плоскости количество точек пересечения несмежных ребер нечетно (в выводе используется аппроксимация [Sk20, Лемма об аппроксимации 1.4.6b].)

Пусть $f : K_n \to \mathbb{R}^2$ — PL отображение. Оно называется PL отображением **общего положения**, если все вершины ломаных находятся в общем положении. Тогда образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек. Назовем **числом ван Кампена** (или инвариантом самопересечения) $v(f)$ четность числа точек пересечения образов несмежных ребер.

Теорема 5.2 (QST). *Для любого PL отображения общего положения графа K_5 в плоскость число ван Кампена нечетно.*

Пример 5.3. *(a) Выпуклый пятиугольник и его диагонали образуют такое PL отображение общего положения $f : K_5 \to \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$.*

(b) Выпуклый четырехугольник и его диагонали образуют такое PL отображение общего положения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$. Треугольник и точка внутри него образуют такое PL отображение общего положения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 0$.

Лемма 5.4 (о четности)**.** *Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в четном числе точек.*[2]

Доказательство теоремы (QST). Ввиду задачи QS достаточно доказать, что $v(f) = v(f')$ для любых двух PL отображений общего положения $f, f' : K_5 \to \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ, причем $f|_\sigma$ линейно (см. рис.). Ребра графа K_5, несмежные с σ, образуют цикл Δ. Тогда

$$v(f) - v(f') = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta| \mod 2 = 0.$$

Здесь второе равенство справедливо по лемме о четности.

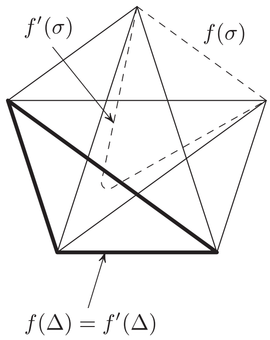

Рис. 8: Независимость $v(f)$ от f

Утверждение 5.5. *Возьмем замкнутую плоскую ломаную L, вершины которой находятся в общем положении.*

(a) Дополнение до L допускает шахматную раскраску (такую, что соседние области покрашены в разные цвета, см. рис.).

(b) Концы ломаной P, вершины которой находятся с вершинами ломаной L в общем положении, имеют одинаковый цвет, если и только если $|P \cap L|$ четно.

Внутренностью по модулю 2 плоской ломаной, вершины которой находятся в общем положении, называется объединение черных областей шахматной раскраски (при условии, что «бесконечная» область белая).

Теорема 5.6 (T: топологическая теорема Радона для плоскости; Баймоч-Барань, 1979)**.** *Для любого PL отображения общего положения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ либо*

• *образы некоторых несмежных ребер пересекаются, либо*

• *образ некоторой вершины лежит во внутренности по модулю 2 образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.*

---

[2]Эта лемма нетривиальна, поскольку ломаные могут иметь самопересечения, и поскольку теорема Жордана нетривиальна. Выводить лемму о четности из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо их доказательства используют лемму о четности или близкое утверждение. *Интересные приложения* леммы о четности 5.4 к теореме Жордана и алгоритмическим вопросам приведены в [Sk20, §1.4].

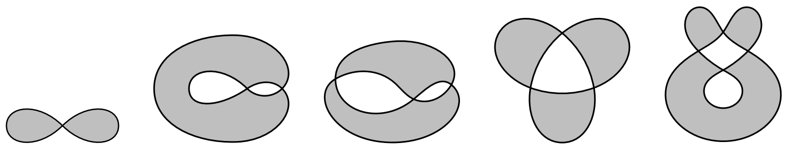

Рис. 9: Внутренности по модулю 2 ломаных

Эта теорема выводится из ее количественной версии (QT).

Для любого PL отображения общего положения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ назовем **числом Радона** $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ сумму четностей

• числа точек пересечения образов несмежных ребер, и

• числа тех вершин графа K_4, образы которых лежат во внутренности по модулю 2 образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.

Теорема 5.7 (QT)**.** *Для любого PL отображения общего положения графа K_4 в плоскость число Радона нечетно.*

Доказательство. Ввиду задачи Q достаточно доказать, что $\rho(f) = \rho(f')$ для любых двух PL отображений общего положения $f, f' : K_4 \to \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ, причем $f|_\sigma$ линейно (см. рис.). Обозначим через τ ребро графа K_4, не соседнее с ребром σ, через S — внутренность по модулю 2 ломаной $\partial S := f\sigma \cup f'\sigma$. Получим

$$\rho(f) - \rho(f') = (|\partial S \cap f\tau| + |S \cap f(\partial\tau)|) \mod 2 = 0.$$

Здесь второе равенство следует из утверждения 5.5.b. ☐

Числом оборотов замкнутой ориентированной плоской ломаной $A_1 \dots A_n$ вокруг не лежащей на ней точки O называется следующая сумма ориентированных углов, деленная на 2π:

$$A_1 \dots A_n \cdot O := (\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1)/2\pi.$$

Пример 5.8. *(a) Число оборотов (произвольно ориентированного) многоугольника вокруг точки вне него равно 0, а вокруг точки внутри него равно ± 1.*

(b) Для любой замкнутой ориентированной ломаной ее внутренность по модулю 2 состоит из всех тех точек, вокруг которых число оборотов нечетно.

(c) Для каждой ломаной (с произвольной ориентацией) на рис. и точки на ваш выбор (в любой из ограниченных областей) найдите число оборотов ломаной вокруг точки.

Больше информации можно найти на [Wn].

Лемма 5.9. *Рассмотрим замкнутую и незамкнутую ломаные L и P на плоскости, все вершины которых находятся в общем положении. Обозначим через P_0 и P_1 начальную и конечную точки P. Тогда $L \cdot P = L \cdot P_1 - L \cdot P_0$.*

Число $L \cdot P$ определяется как сумма *знаков* точек пересечения ломаных L и P. Эта лемма показывает, что дополнение до L имеет *нумерацию Мебиуса-Александера*, то есть «целочисленную шахматную раскраску».

Теорема 5.10 (MT: топологическая теорема Тверберга для плоскости; Барань-Шлосман–Сюч 1981, Езайдын 1987, Воловиков 1996)**.** *Если r — степень простого, то для любого PL отображения $f : K_{3r-2} \to \mathbb{R}^2$ либо $r-1$ треугольников оборачиваются вокруг одной вершины, либо $r-2$ треугольников оборачиваются вокруг пересечения двух ребер, где никакие два из указанных треугольников, ребер и вершин не имеют общих вершин.*

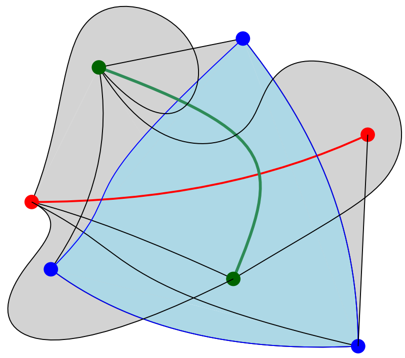

Рис. 10: Топологическая теорема Тверберга на плоскости, $r = 3$

Верен ли аналог этой теоремы для $r = 6$, **неизвестно!**

Количественная версия (QMT) **неизвестна**, даже если r — степень простого!

Обозначим через Δ_N симплекс размерности N.

Теорема 5.11 (DT: топологическая теорема Радона)**.** *Для любого непрерывного отображения $\Delta_{d+1} \to \mathbb{R}^d$ образы некоторых его непересекающихся граней пересекаются.*

Попробуйте сформулировать утверждение (QDT). Оно верно.

Теорема 5.12 (DMT: топологическая теорема Тверберга)**.** *Если r — степень простого, то для любого PL отображения $f\colon \Delta_{(d+1)(r-1)} \to \mathbb{R}^d$ существуют попарно непересекающиеся грани $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \subset \Delta_{(d+1)(r-1)}$, для которых $f(\sigma_1) \cap \ldots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.*

Количественная версия (QDMT) **неизвестна**, даже если r — степень простого!

Аналог теоремы (DMT) неверен, если r — не степень простого (для $d > 2r$). Для этих контрпримеров важны работы М. Езайдына (1987), М. Громова (2010), Ф. Фрика, П. Благоевича, Г. Циглера (2014-2015), И. Мабийяра и У. Вагнера (2015). Мы не обсуждаем соотношение вкладов разных авторов, поскольку это соотношение непростое. Читатель может составить собственное мнение, изучив доказательства и точные ссылки на каждый его шаг, см. обзоры [Sk16]. Контрпримеры были сначала построены для $d > 3r$, а затем для $d > 2r$ (Аввакумов-Мабийяр-Скопенков-Вагнер, 2015).

Верен ли аналог этой теоремы для $d \leq 2r$ и r не степени простого (например, для $d = 2$ и $r = 6$), **неизвестно!**

Попробуйте сформулировать утверждения (SDT), (QSDT), (SMT), (QSMT), (SDMT), и (QSDMT)!

Утверждения (SDT) и (QSDT) верны (теорема ван Кампена-Флореса, 1932-34).

Утверждения (SMT), (SDMT) верны, если r — степень простого (r-кратная теорема ван Кампена-Флореса, Саркария 1991, Воловиков 1996). Утверждения (SMT) и (SDMT) неверны для $d \leq 2r$ и r не степени простого (Мабийяр-Вагнер 2015 для «коразмерности» ≥ 3, Аввакумов-Мабийяр-Скопенков-Вагнер 2015 для «коразмерности» 2). см. обзоры [Sk16]. Верны ли этих утверждения для «коразмерности» 1, **неизвестно!**.

Количественные версии (QSMT) и (QSDMT) **неизвестны**, даже если r — степень простого!

6 Ответы и некоторые решения

SD. (3) Введем обозначения из первого абзаца шага индукции в доказательстве теоремы Радона для $d = 2$. Воспользуемся утверждением S для множества M. Получим разбиение на два двухэлементных множества U_1' и U_2', выпуклые оболочки которых пересекаются. Повторим 4, 5 и 6 абзацы в доказательстве теоремы Радона. Получим, что $X_2 \in \langle O, U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$, что и требовалось.

(4) Можно считать, что никакие 5 из данных 7 точек не лежат в одной трехмерной гиперплоскости. Тогда существует гиперплоскость α, для которой ровно одна точка O из набора лежит по одну сторону от α, а остальные точки $A_1, \ldots, A_6$ — по другую (рис. 5). Возьмем 6 точек пересечения плоскости α с отрезками $OA_1, \ldots, OA_6$. Так как никакие 5 из данных 7 точек не лежат в одной трехмерной гиперплоскости, то никакие 4 из взятых 6 точек не лежат в одной плоскости. Тогда по теореме S'D имеются два зацепленных треугольника с вершинами во взятых точках. Значит, по утверждению 3.7 два соответствующих тетраэдра с вершиной в O имеют общую точку, отличную от O. Любые две их боковые грани пересекаются только в вершине O. Поэтому основание одного из двух тетраэдров пересекает некоторую грань другого.

1.1. 0, если они параллельны; 1, если прямая пересекает плоскость; ∞, если прямая полностью лежит в плоскости.

1.4. (a) Пара точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

(c) Объединение четвертей трех окружностей:

$$\begin{cases} x = 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

1.5. (a) Пара точек $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 0, 0, -1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x = y = 0 \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$.

(c) Сфера $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$.

(d) Граф K_4, образованный объединением четвертей шести окружностей, одна из которых — $\begin{cases} x = y = 0,\ z \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$.

1.8. (b) Пустое множество, точка (если прямая пересекает плоскость), прямая (если прямая содержится в плоскости).

(c) Пустое множество, прямая (если плоскость пересекает гиперплоскость), плоскость (если плоскость содержится в гиперплоскости).

(d) Пустое множество, плоскость (если они пересекаются), гиперплоскость (если они совпадают).

(e) Пустое множество, точка или прямая (если они пересекаются), плоскость (если они совпадают).

1.9. Ответы: (b) пустое множество; (d) плоскость или пустое множество; (e) точка или пустое множество.

Замечание. Из ответа к (b) следует, что если никакие 5 из 6 вершин двух треугольников в $\mathbb{R}^4$ не лежат в одной гиперплоскости, то контур первого не пересекает второй. Это означает, что никакие два треугольника «общего положения» в $\mathbb{R}^4$ «не зацеплены».

D(d). Индукция по d. База для $d = 1$ очевидна.

Переход от d к $d+1$. Существует d-мерная гиперплоскость α, для которой ровно одна точка из данного набора лежит по одну сторону от α, а остальные — по другую. Обозначим через O одну точку набора, а через M множество оставшихся точек набора так, чтобы α отделяла O от M. Для любой точки $A \in M$ обозначим $A' := \alpha \cap OA$.

Воспользуемся теоремой Радона для множества $M' := \{ A' \mid A \in M \}$ из $d+2$ точек в d-мерном пространстве α. Получим разбиение на два множества U_1' и U_2', выпуклые оболочки которых пересекаются в точке X'. Обозначим $U_1 := \{ A \mid A' \in U_1' \}$ и $U_2 := \{ A \mid A' \in U_2' \}$.

Ясно, что $U_1' \subset \langle O, U_1 \rangle$. Следовательно, $X' \in \langle O, U_1 \rangle$, и, более того, весь отрезок OX' содержится в $\langle O, U_1 \rangle$. Обозначим через X_1 точку, для которой прямая OX' пересекает $\langle O, U_2 \rangle$ по отрезку OX_1. Тогда $X_1 \in \langle U_1 \rangle$ и $X' \in OX_1$.

Аналогично, через X_2 обозначим точку, для которой прямая OX' пересекает $\langle O, U_2 \rangle$ по отрезку OX_2. Тогда $X_2 \in \langle U_2 \rangle$ и $X' \in OX_2$.

Точки X_1 и X_2 лежат на луче OX'. Не умаляя общности, X_2 лежит между O и X_1. Тогда $X_2 \in \langle O, U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$, что и требовалось.

2.2. (a) Нет, не находятся. Любые три диаметра пересекаются в одной точке.

2.3. (a) Since the plane has infinitely many points, it has infinitely many lines. Hence there is a прямая l, отличная от данных. Ей принадлежит бесконечное число точек. Каждая прямая пересекает l не более чем в одной точке. Следовательно, найдется точка на l, не принадлежащая ни одной из данных прямых.

(b) Да, существуют. Докажем индукцией по n, что существует n точек общего положения на плоскости. База для $n = 1$ очевидна, переход следует из утверждения 2.3.a.

(c) *Указание.* Объединение красных отрезков есть сумма по модулю 2 контуров красных треугольников. И $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$.

2.4. Тетраэдр разбивает пространство, далее аналогично лемме о четности 2.1.

2.5. (a) *Ответ:* да, существуют. Построение аналогично задаче 2.3.b.

(b) Следует из леммы о четности 2.4 аналогично утверждению 2.3.c.

2.7. (a) *Ответ:* да, существуют. Построение аналогично построениям в задачах 2.3.b и 2.5.a.

(b) Следует из леммы о четности 2.1 аналогично утверждениям 2.3.c и 2.5.b.

QSD. (3) Любые два треугольника, натянутые на две непересекающиеся тройки отмеченных вершин, пересекаются либо по пустому множеству, либо по отрезку. Отметим все концы всех отрезков, являющихся пересечением треугольников. Ввиду общности положения концов четное число, и точка является концом тогда и только тогда, когда точка является пересечением отрезка с треугольником.

QS'D. Существует плоскость α, для которой ровно одна точка O из данных 6 лежит по одну сторону от α, а остальные точки $A_1, \ldots, A_5$ — по другую. Возьмем точки $A_1', \ldots, A_5'$ пересечения плоскости α с отрезками $OA_1, \ldots, OA_5$. Так как никакие 4 из данных 6 точек не лежат в одной плоскости, то никакие 3 из взятых 5 точек не лежат на одной прямой.

Отрезок не может пересекать треугольник более, чем по двум точкам. Поэтому в лемме 3.3 о понижении размерности можно заменить «ровно одной стороны» на «нечетного числа сторон». Тогда следующие числа имеют одинаковую четность:

• количество P зацепленных неупорядоченных пар треугольников, образованных данными 6 точками;

• количество Q отрезков A_iA_j, лежащих ниже нечетного количества сторон их «дополнительных» треугольников $A_kA_lA_m$, $\{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

• количество «проходов», т.е. таких упорядоченных пар (A_iA_j, A_kA_l) отрезков, у которых первый отрезок ниже второго;

• количество точек пересечения внутренностей отрезков с вершинами в $A'_1, \dots, A'_5$.

Здесь сравнение $P \equiv Q \mod 2$ следует из леммы 3.3 о понижении размерности.

По теореме QS последнее число нечетно. Следовательно, число P также нечетно.

3.5. (3) Take points close to the vertices of regular octahedron.

(3') This number has the same parity a twice the number from theorem QSD(3). Alternatively, we have

$$\sum_{\{A,B\}} |AB \cap \partial\Delta_{AB}|_2 = \sum_{\{A,B\}} (|A \cap \Delta_{AB}|_2 + |B \cap \Delta_{AB}|_2) = \sum_A \sum_{B \neq A} |A \cap \Delta_{AB}|_2 = 0.$$

Here the last equality holds because for every A the set $\{\Delta_{AB}\}_{B\neq A}$ is a 3-cycle.

3.6. (4'-3) Пометим все точки пересечения пар треугольников, натянутых на две непересекающиеся тройки данных точек. Тогда искомое количество имеет ту же четность, что и удвоенное число помеченных точек. Следовательно, это количество четно.

3.7. (c) Обозначим через γ плоскость пересечения трехмерных гиперплоскостей, натянутых на тетраэдры. Тогда $\alpha \cap \gamma$ — прямая пересечения плоскостей зацепленных треугольников $\alpha \cap \Delta$ и $\alpha \cap \Delta'$. Тогда $\Delta \cap \gamma$ и $\Delta' \cap \gamma$ — треугольники с общей вершиной O (рис. 4). Так как α отделяет O от оснований тетраэдров, то $\alpha \cap \gamma$ отделяет O от оснований этих треугольников. Так как треугольники $\alpha \cap \Delta$ и $\alpha \cap \Delta'$ зацеплены, то точки пересечения прямой $\alpha \cap \gamma$ с контурами треугольников $\Delta \cap \gamma$ и $\Delta' \cap \gamma$ чередуются вдоль прямой l. Следовательно, по п. (a) эти контуры пересекаются в точке, отличной от O.

Список литературы

[Ko18] * *Е. Колпаков.* Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности, Мат. Просвещение, 23 (2018), arXiv:1903.11055.

[RRS] * *V. Retinskiy, A. Ryabichev and A. Skopenkov.* Motivated exposition of the proof of the Tverberg Theorem (in Russian). Mat. Prosveschenie, 27 (2021), 166–169. arXiv:2008.08361.

[Sk14] * *A. Skopenkov,* Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory, arXiv:1402.0658.

[Sk16] * *A. Skopenkov,* A user's guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v4. Abridged earlier published version: Russian Math. Surveys, 73:2 (2018), 323–353.

[Sk18] * *A. Skopenkov.* Invariants of graph drawings in the plane. Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.

[Sk20] * *A. Skopenkov,* Algebraic Topology From Geometric Standpoint (in Russian), MCCME, Moscow, 2020 (2nd edition). Part of the book: `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf` . Part of the English translation: `https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf`.

[Sk] * *А. Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

[Wn] * `https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number`