

Графы: число ребер

Задача 1. В Тридевятом царстве 27 городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из каждого города выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в тридевятом царстве? *Ответ.* $27 \cdot 4 : 2 = 54$.

Задача 2. Став царем Тридевятого царства, Иван-дурак повелел построить еще дорог, так чтобы из каждого города стало выходить по 7 дорог. Удастся ли подданным выполнить приказ царя Ивана XIII Мудрого? *Ответ.* Нет ($27 \cdot 7 : 2 \dots$).

Задача 3. С тех пор как в Тридевятом царстве завелся Соловей-разбойник, из города в город можно добраться только на ковре-самолете. Из столицы выходит 9 ковровлиний, из города Муром — одна, а из всех остальных городов — по 8. Докажите, что можно добраться из столицы в Муром. *Указание.* Предположим, что это не так. Сколько дорог в каждой из компонент?

Задача 4. На приеме каждый из 11 послов различных государств хочет поздороваться за руку с наибольшим числом коллег; причем по правилам этикета все послы должны сделать по одинаковому числу рукопожатий. Сколько рукопожатий сможет сделать каждый посол, если послы государств Лилипутия и Блефуску не здороваются? *Указание.* Посмотрев на посла Лилипутии, можно понять, что больше чем по 9 рукопожатий послам сделать не удастся. Мог ли каждый из 11 послов сделать по 9 рукопожатий?

Задача 5. а) В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку. Какое наибольшее число цветков могло быть подарено?



б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для класса в котором $2n$ человек; $2n + 1$ человек. *Ответ.* n^2 ; $n(n + 1)$.

Графы: связность

Задача 6. В стране 25 городов, из каждого из которых выходит минимум по 12 дорог. Докажите, что из любого города можно попасть в любой.

Задача 7. В стране из каждого города выходило ровно по 20 дорог и из любого города можно было добраться в любой другой. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что из любого города все еще можно попасть в любой другой.

Задача 8. В стране 20 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из любого города все еще можно было бы попасть в любой другой?

Задача 9. В стране, в которой 20 городов и каждые два города соединены дорогой, везде ввели односторонне движение. Докажите, что из некоторого города можно попасть в любой другой, проезжая не более чем по 2 дорогам.