Перекраивание многоугольников

Будем говорить, что многоугольники *равносоставлены*, если один можно перекроить в другой (разрезать первый на многоугольные части и сложить из них второй).

Есть очевидное препятствие к равносоставленности: равносоставленные многоугольники имеют, конечно, одинаковую площадь. Оказывается, это единственное препятствие.

Теорема Бойяи–Гервина: *если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то они равносоставлены.*

Желающие убедиться в нетривиальности этой теоремы могут попробовать, например, перекроить прямоугольник в правильный треугольник той же площади.

Обсудим план доказательства теоремы.

0) Мы уже знаем, что если можно перекроить X в Y и Y в Z, то можно и перекроить X в Z. Поэтому можно строить перекраивание в несколько шагов.

1) Строить свое перекраивание для каждой пары многоугольников — слишком утомительно. Лучше завести эталон, к которому будем все приводить. В качестве такого эталона удобно взять прямоугольники со стороной 1 (это лучше, например, квадратов, тем, что два таких эталона легко сложить).

2) Любой многоугольник давайте порежем на простые части и каждую перекроим в эталон — благо сложить из нескольки прямоугольников со стороной 1 один такой прямоугольник совсем легко.

   Например, любой многоугольник можно разрезать на треугольники (по крайней мере, понятно как сделать это для *выпуклого* многоугольника: достаточно провести все диагонали из одной вершины[1]).

3) Каждый треугольник можно перекроить в параллелограмм (или даже в прямоугольник). Осталось доказать следующее утверждение.

   Лемма (теорема Бойяи–Гервина для параллелограммов). *Любой параллелограмм можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.*

4) Указание к лемме: произвольный параллелограмм удобно сначала перекроить в *параллелограмм* со стороной 1, а уже тот — в прямоугольник со стороной 1; при этом первый шаг легко сделать если параллелограмм достаточно вытянутый (конкретнее: если одна его сторона меньше 1, а другая больше 2).

[1] На самом деле, можно разбить на треугольники диагоналями и невыпуклый многоугольник, но доказать это не очень просто. Проще порезать произвольный многоугольник на треугольники и трапеции (как?).

Повторим еще раз последовательность ходов: любой многоугольник $\to$ треугольники; треугольник $\to$ параллелограмм $\to$ вытянутый параллелограмм $\to$ параллелограмм со стороной 1 $\to$ прямоугольник со стороной 1.