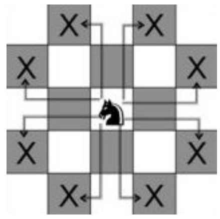
Черное и белое

Задача 1. а) Обойдите конем доску 5×5, побывав в каждой клетке по одному разу (пронумеруйте клетки в соответствии с порядком обхода).



б) Закрасьте в таблице из предыдущего пункта все клетки с нечетными номерами. Что получилось? Почему?

в) Сделав несколько ходов, конь вернулся на исходное поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Задача 2. Доска а) 3×3; б) 5×5; в) 9×9 разрезана на доминошки 2×1 и одну клетку. Где может располагаться эта клетка?

Задача 3. а) В каждой клетке доски 9×9 сидит по жуку. В некоторый момент каждый жук перелетает в соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что после этого останется хотя бы одна пустая клетка.

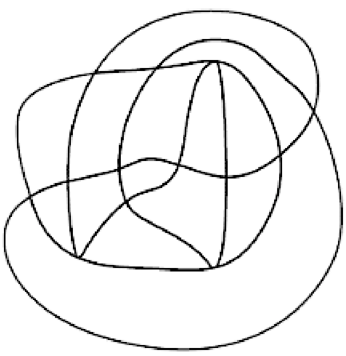
б) В каждой клетке доски 9×9 сидит по гусенице. В некоторый момент каждая гусеница переползает в соседнюю *по диагонали* клетку. Докажите, что после этого хотя бы 9 клеток останутся свободными.

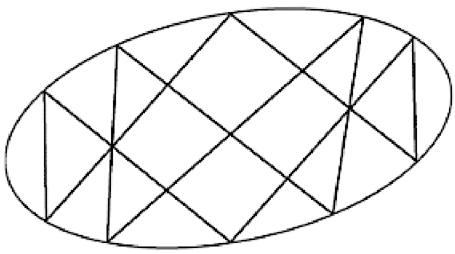
Задача 4. а) Как покрасить доску 6×6 в три цвета так, чтобы в любом прямоугольнике 1×3 содержались все три цвета?

б) Васе подарили набор «Юный паркетчик», состоящий из 12 прямоугольников 3×1. Хулиган Кирилл заменил один из них на уголок из трех клеток. Сможет ли Вася сложить квадрат 6×6?

в) Доска 8×8 разрезана на 21 прямоугольник 3×1 и одну клетку. Где может располагаться эта клетка?

Задача 5. Можно ли обойти все страны (переходя каждый раз из страны в граничущую с ней), не побывав ни в какой дважды, для карт ниже? Если это возможно, закрасьте страны с нечетными номерами.





Черное и белое (продолжение)

Задача 6. В каждой вершине некоторого многогранника сходится четное число граней. Докажите, что если жук прополз по нескольким граням этого многогранника (каждый раз переползая из грани в соседнюю по ребру) и вернулся на исходную грань, то он сделал четное число ходов.

Задача 7. Докажите, что грани многогранника можно покрасить в два цвета правильным образом (так, чтобы имеющие общее ребро грани были разных цветов) тогда и только тогда, когда в каждой его вершине сходится четное число граней.

Задача 8. Покрасьте точки плоскости в какое-нибудь число цветов (лучше — поменьше), чтобы любые две точки на расстоянии ровно 1 были покрашены в разные цвета.

Какое *минимальное* число цветов необходимо в этой задаче — известная нерешенная проблема.