ОТЧЕТ ПОЛУЧАТЕЛЯ СТИПЕНДИИ П. ДЕЛИНЯ ЗА 2010 ГОД И ПО ИТОГАМ ЗА 2008–10 ГОДЫ

Л. Е. ПОСИЦЕЛЬСКИЙ

1. Основные результаты, полученные в 2010 году

Важнейшие результаты, над которыми я работал в этом году, уходят корнями в 1995–97 годы. В 2010 году они получили дальнейшее развитие. Была решена задача о неплоской кошулевости, которую мне не удавалось решить в 1990-х годах. Эти результаты были опубликованы в моих препринтах `arXiv:1006.4343 [math.KT]` и `arXiv:1008.0095 [math.KT]`.

В моей заметке `arXiv:1007.5010 [math.KT]` был опубликован результат, полученный в 2003 году. Работа `arXiv:1010.0892 [math.CT]`, написанная совместно с А. Полищуком, является результатом проекта, задуманного во время визита моего соавтора в Москву в ноябре 2009 года.

Версия препринта `arXiv:0905.2621 [math.CT]` обновлялась в течение 2010 года; были вставлены подразделы 6.8 и 1.9, содержащие результаты, полученные в 2010 и 1999 годах, соответственно. Ниже приводятся формулировки результатов в их окончательном виде, в котором они вошли в перечисленные препринты.

1.1. В моем препринте "Mixed Artin–Tate motives with finite coefficients", `arXiv:1006.4343 [math.KT]` обсуждаются свойства кошулевости, возникающие в теории мотивов.

Особое внимание уделено случаю мотивов с конечными коэффициентами, взаимно-простыми с характеристикой поля (случай, связанный с гипотезой Милнора–Блоха–Като, доказанной Воеводским–Ростом–…) В этом случае потенциально возможно описание мотивов над полем в терминах группы Галуа. В работе решается эта задача для мотивов Артина–Тейта; полученное решение работает в предположении $K(\pi,1)$-гипотез.

В некоторых ситуациях, версии $K(\pi,1)$-гипотезы для мотивов Тейта или Артина–Тейта эквивалентны кошулевости алгебр диагональных когомологий. В частности, это относится к случаю мотивов с конечными коэффициентами над полем, содержащим соответствующие корни из единицы.

В препринте изложены следующие результаты.

- Неотрицательно градуированное кольцо A называется кошулевым, если существует точная категория $\mathcal{E}$, снабженная последовательностью подкатегорий $\mathcal{E}_i$, точной автоэквивалентностью (1), и эквивалентностью между категорией $\mathcal{E}_0$ и категорией конечно порожденных проективных правых A_0-модулей, так что $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i(1)$, точная категория $\mathcal{E}$ порождается подкатегориями $\mathcal{E}_i$ с помощью расширений, и биградуированное кольцо $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(A_0, A_0(j))$ сосредоточено на диагонали $i = j$ и изоморфно A. Если $A'_0 \to A_0$ — гомоморфизм колец и градуированное кольцо A' получается из A заменой A_0 на A'_0 при оставлении остальных градуировочных компонент $A'_i = A_i$, $i > 0$ неизменными, то градуированные кольца A и A' кошулевы одновременно. Если A — плоский левый A_0-модуль, то A кошулево тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}^A_{ij}(A_0, A_0) = 0$ при $i \neq j$ (обычное определение).

- Пусть $\mathcal{D}$ — триангулированная категория и $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ — полная подкатегория, такая что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}[-1]) = 0$ и $\mathcal{E}$ замкнута относительно расширений в $\mathcal{D}$. Тогда на $\mathcal{E}$ есть естественная структура точной категории в смысле Квиллена. Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ — класс объектов в $\mathcal{E}$, такой что все объекты $\mathcal{E}$ получаются из объектов $\mathcal{J}$ с помощью итерированных расширений и перехода к прямым слагаемым. Допустим сначала, что класс $\mathcal{J}$ конечен. Тогда если градуированное кольцо
$$A = \bigoplus\nolimits_n \bigoplus\nolimits_{X,Y\in\mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[n])$$
кошулево, то естественные отображения $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[n])$ являются изоморфизмами для всех $X, Y \in \mathcal{E}$ и $n \geq 0$. Без предположения конечности $\mathcal{J}$, аналогичное достаточное условие для изоморфизма $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}$ формулируется в терминах свойства кошулевости "большого градуированного кольца" (градуированной предаддитивной категории) A.
- Пусть M/K — конечное расширение Галуа полей характеристики, не делящей натуральное число m, и пусть G_K — абсолютная группа Галуа поля K. Предположим, что гипотеза Бейлинсона–Лихтенбаума о мотивных когомологиях с конечными коэффициентами выполнена для полей между K и M. Тогда минимальная полная подкатегория $MAT(K, M, \mathbb{Z}/m)$ в триангулированной категории мотивов $DM(K, \mathbb{Z}/m)$, содержащая тейтовские подкрутки мотивов спектров полей, промежуточных между K и M, и замкнутая относительно расширений, эквивалентна точной категории дискретных G_K-модулей N над $\mathbb{Z}/m$, снабженных конечной убывающей фильтрацией F, такой что G_K-модули $\mathrm{gr}^i_F N$ суть конечно порожденные перестановочные G_K/G_M-модули над $\mathbb{Z}/m$, подкрученные на циклотомические модули $\mu_m^{\otimes i}$.
- Пусть M/K — конечное расширение Галуа полей, и пусть k — кольцо коэффициентов, такое как $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Q}$, ... Пусть $MAT(K, M, k)$ — минимальная полная подкатегория в триангулированной категории мотивов $DM(K, k)$, содержащая тейтовские подкрутки мотивов полей, промежуточных между K и M, и замкнутая относительно расширений. Из "гипотез о занулении" Бейлинсона–Суле следует, что $MAT(K, M, k)$ — точная категория (когда $k = \mathbb{Q}$ — даже абелева). Поскольку триангулированная категория $DM(K, k)$ "имеет алгебраическое происхождение",

можно построить функтор $D^bMAT(K,M,k) \to DM(K,k)$ из производной категории точной категории мотивов Артина–Тейта в триангулированную категорию мотивов. Говорят, что $MAT(K,M,k)$ удовлетворяет $K(\pi,1)$-*гипотезе*, или *гипотезе о глупых фильтрациях*, если этот функтор вполне строгий. Предположим, что мы находимся в одной из следующих трех ситуаций:

а) $k=\mathbb{Q}$ и $\operatorname{char} K>0$, или
б) $k=\mathbb{Z}/p^r$ и $\operatorname{char} K=p$, или
в) $k=\mathbb{Z}/m$ и K содержит первообразный корень степени m из единицы.

Тогда $MAT(K,M,k)$ удовлетворяет $K(\pi,1)$-гипотезе если и только если градуированное кольцо

$$A=\bigoplus\nolimits_n\bigoplus\nolimits_{K\subset L',L''\subset M}\operatorname{Hom}_{DM(K,k)}(k[L'],\,k[L''](n)[n])$$

кошулево, где $k[L]$ обозначает мотив спектра поля L. В случае а), мы здесь опираемся на гипотезу Бейлинсона–Паршина, в случае б) — на результаты Гайссера–Левина, в случае в) — на гипотезу Бейлинсона–Лихтенбаума.

- Доказательства некоторых сформулированных выше результатов опираются на следующую конструкцию точной присоединенной градуированной факторкатегории. Пусть $\mathcal{F}$ — точная подкатегория с последовательностью полных подкатегорий $\mathcal{E}_i$, $i\in\mathbb{Z}$, замкнутых относительно расширений. Предположим, что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)$ для $i<j$. Пусть $(1)\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ — точная автоэквивалентность точной категории $\mathcal{F}$, такая что $\mathcal{E}_{i+1}=\mathcal{E}_i(1)$, и пусть $\sigma_X\colon X\to X(1)$ — естественное преобразование, определенное для всех $X\in\mathcal{F}$, и такое что $\sigma_{X(1)}=\sigma_X(1)$. Предположим, что индуцированные отображения $\sigma^r\colon\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(X,Y)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(X,Y(r))$ являются изоморфизмами для всех X, $Y\in\mathcal{E}_i$, $i\in\mathbb{Z}$, $r\ge0$. Наконец, предположим, что всякий морфизм $X\to Y$ в $\mathcal{F}$, аннулируемый функтором "последовательных факторов" $\mathcal{F}\to\prod_i\mathcal{E}_i$, факторизуется через σ_X или, что все равно, через $\sigma_Y(-1)$. Тогда существует точная категория $\mathcal{G}$ и точный функтор $\operatorname{gr}\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, вполне строгий на каждой $\mathcal{E}_i$, такой что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)=0$ для всех $i\ne j$, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)=0$ для всех $i>j$, имеется точная автоэквивалентность $(1)\colon\mathcal{G}\to\mathcal{G}$, согласованная с функтором gr, и для любых объектов X, $Y\in\mathcal{F}$ имеется функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots\longrightarrow\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{F}}(X,Y(-1))\longrightarrow\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{F}}(X,Y)\longrightarrow\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{G}}(\operatorname{gr}X,\,\operatorname{gr}Y)\longrightarrow\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathcal{F}}(X,Y(-1))\longrightarrow\cdots$$

- Пусть K — фиксированное поле и A — DG-алгебра над $\mathbb{Z}$, снабженная дополнительной положительной "внутренней" градуировкой, такая что ее компоненты являются абелевыми группами без кручения и для любого кольца коэффициентов k триангулированная подкатегория, порожденная объектами Тейта $k(j)$ в $DM(K,k)$ отождествляется с категорией совершенных DG-модулей над A так, что мотивы Тейта $k(j)$ соответствуют свободным градуированным DG-модулям с одной образующей $A(j)$. Пусть внутренне градуированная DG-коалгебра C над $\mathbb{Z}$ является приведенной бар-конструкцией DG-алгебры A. Тогда из "гипотез о занулении" Бейлинсона–Суле с рациональными коэффициентами в сочетании с гипотезами Бейлинсона–Лихтенбаума с конечными коэффициентами (и результатов Гайссера–Левина для коэффициентов $\mathbb{Z}/p$, если $\operatorname{char} K = p$) следует, что когомологии C зануляются в отрицательных когомологических степенях. $K(\pi,1)$-гипотеза для мотивов Тейта с конечными коэффициентами (сформулированная выше) эквивалентна занулению когомологий C в положительных когомологических степенях. Таким образом, мотивы Тейта описываются DG-коалгеброй над $\mathbb{Z}$, компоненты которой являются абелевыми группами без кручения, а когомологии которой сосредоточены в когомологической градуировке 0 (но имеют кручение всех простых порядков, не равных $\operatorname{char} K$). На когомологиях DG-коалгебры C имеется структура коалгебры над $\mathbb{Z}$, но класс квази-изоморфизма DG-коалгебры C в категории DG-коалгебр с компонентами, плоскими над $\mathbb{Z}$, не восстанавливается по этому коумножению на когомологиях.

1.2. В моем препринте "Galois cohomology of a number field is Koszul", `arXiv:1008.0095 [math.KT]`, свойства кошулевости алгебр милноровской K-теории/когомологий Галуа одномерных локальных и глобальных полей доказываются с использованием коммутативных квадратичных базисов Грёбнера (коммутативных PBW-базисов) и теории полей классов (включая частные случаи теоремы плотности Чеботарева). Участие А. Вишика в начальных стадиях этого проекта (осенью 1995 года) сыграло большую роль в его развитии.

В препринте изложены следующие результаты.

- Для любого одномерного локального или глобального поля K и простого числа l алгебра милноровской K-теории $K^M(K)/l$ кошулева.
- Для любого одномерного локального или глобального поля K и простого числа l, такого что K содержит квадратный корень из -1 если $l=2$, ядро отображения из внешней алгебры $\Lambda(K,l)$, порожденной векторным пространством K^*/l над $\mathbb{Z}/l$, в $K^M(K)/l$, является кошулевым модулем над $\Lambda(K,l)$. То же верно для всех одномерных локальных полей без предположения о квадратном корне из -1, если под $\Lambda(K,l)$ понимается алгебра над $\mathbb{Z}/l$, порожденная K^*/l с соотношениями $\{x,-x\}=0$.
- Для любого одномерного локального или глобального поля K, простого числа l, и элемента $c \in K^*/l$, такого что $\{c,c\}=0$ в $K_2^M(K)/l$, идеал $cK^M(K)/l$ является кошулевым модулем над $K^M(K)/l$. В случае одномерного локального поля K, условие, что $\{c,c\}=0$ можно опустить.

1.3. В моей заметке “The algebra of closed forms in a disk is Koszul”, `arXiv:1007.5010 [math.KT]` рассматривается градуированная алгебра замкнутых форм на диске с логарифмическими особенностями вдоль нескольких координатных гиперплоскостей. Под диском понимается объект одной из нескольких геометрических категорий: аффинное пространство или формальный диск над полем нулевой характеристики, комплексно-аналитический или вещественный гладкий диск, спектр алгебры многочленов или формальных степенных рядов с разделенными степенями над полем простой характеристики, или, более общим образом, любое пространство, этально отображающееся в диск и удовлетворяющее подходящей версии леммы Пуанкаре.

Доказано, что алгебра замкнутых дифференциальных форм на диске D с координатами $z_1, \ldots, z_u$, с логарифмическими особенностями вдоль гиперплоскостей $z_s = 0$, $1 \le s \le v$, где $0 \le v \le u$ фиксировано, по отношению к операции умножения форм, является кошулевой. Поскольку понятие кошулевости подразумевает рассмотрение тензорных произведений градуировочных компонент алгебры, в случаях алгебр форм на формальном или комплексно-аналитическом диске свойство кошулевости допускает естественную модификацию, при которой тензорные произведения заменяются на их естественные пополнения. Соответствующее понятие топологической кошулевости обсуждается в работе на языке квази-ассоциативных квази-алгебр. Показано, что алгебры форм на диске кошулевы как в нетопологическом, так и в топологическом смысле.

1.4. В новых подразделах 6.8 и 1.9 моего препринта “Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence”, `arXiv:0905.2621 [math.CT]`, написанных в 2010 году, содержатся следующие результаты.

- Имеется эквивалентность категорий CDG-алгебр B над полем k, снабженных возрастающей фильтрацией F, совместимой со структурой алгебры и такой что $d_B(F_nB) \subset F_{n+1}B$, $h_B \in F_2B$, и присоединенная градуированная алгебра $\mathrm{gr}_F B$ кошулева в градуировке n, индуцированной индексами фильтрации F, и имеет конечную гомологическую размерность, и CDG-коалгебр $\mathcal{C}$ над тем же полем k, снабженных конечной убывающей фильтрацией G, совместимой с коумножением и такой что $d_{\mathcal{C}}(G^n\mathcal{C}) \subset G^{n-1}\mathcal{C}$, $h_{\mathcal{C}}(G^3\mathcal{C}) = 0$, и присоединенная градуированная коалгебра $\mathrm{gr}^G\mathcal{C}$ кошулева в градуировке n, индуцированной индексами фильтрации G.
- Абсолютная производная (= копроизводная = контрапроизводная) категория левых CDG-модулей над CDG-алгеброй B (как выше) эквивалентна копроизводной категории левых CDG-комодулей над CDG-коалгеброй $\mathcal{C}$ и контрапроизводной категории левых CDG-контрамодулей над CDG-коалгеброй $\mathcal{C}$.
- Абсолютная производная категория CDG-модулей над CDG-алгеброй B (как выше) компактно порождена CDG-модулями, подлежащие градуированные B-модули которых проективны и конечно порождены.

- Если CDG-коалгебра $\mathcal{C}$ (как выше) конильпотентна, то ей отвечает DG-алгебра B, абсолютная производная категория DG-модулей над которой совпадает с производной категорией DG-модулей.
- Пусть A — DG-кольцо (когомологически градуированное целыми числами). Тогда $H^i(A) = 0$ для всех $i < 0$ тогда и только тогда, когда любой объект M производной категории DG-модулей над A может быть включен в выделенный треугольник $M^{\geq 1} \to M \to M^{\leq 0} \to$, где когомологии DG-модуля $M^{\geq 1}$ сосредоточены в когомологических градуировках 1 и выше, а когомологии DG-модуля $M^{\leq 0}$ сосредоточены в когомологических градуировках 0 и ниже. Это такая лемма о глупых фильтрациях в категориях DG-модулей. Заменив условие на $M^{\geq 1}$ условием принадлежности к минимальной полной подкатегории производной категории DG-модулей, порожденной объектами $A[-i]$, $i \geq 1$, и замкнутой относительно счетно итерированных расширений (в смысле гомотопического прямого предела последовательностей), можно получить “глупые фильтрации” для DG-модулей над произвольным DG-кольцом A.

1.5. В моем препринте “Hochschild (co)homology of the second kind I”, `arXiv:1010.0982 [math.CT]`, написанном совместно с А. Полищуком, рассматривается задача о сравнении (ко)гомологий Хохшильда второго рода CDG-алгебры (DG-алгебры с кривизной) B и (ко)гомологий Хохшильда первого рода DG-категории C правых CDG-модулей над B, конечно порожденных и проективных как градуированные B-модули. Удобным промежуточным объектом для сравнения являются (ко)гомологии Хохшильда второго рода DG-категории C.

Разница между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода связана с возможностью конструирования тотального комплекса бикомплекса Хохшильда как с помощью взятия прямых сумм, так и прямых произведений членов бикомплекса вдоль его диагоналей. Терминология восходит к работе Хьюзмоллера, Мура и Сташефа 1974 года. Альтернативная терминология была недавно предложена Кальдарару и Ту: то, что мы называем (ко)гомологиями Хохшильда второго рода, они называют когомологиями Хохшильда с компактным носителем и гомологиями Хохшильда Бореля–Мура.

В работе получены следующие результаты (все CDG-алгебры и DG-категории ниже могут быть градуированы как целыми числами, так и вычетами по модулю 2, или рациональными числами с нечетными знаменателями, или вообще любой абелевой группой с надлежащими дополнительными структурами).

- Если k — коммутативное кольцо, B — CDG-алгебра над k, плоская как градуированный k-модуль, и C — DG-категория правых CDG-модулей над B, конечно порожденных и проективных как градуированные B-модули, то (ко)гомологии Хохшильда второго рода CDG-алгебры B и k-линейной DG-категории C естественно изоморфны.

- Пусть C — k-линейная DG-категория, комплексы морфизмов в которой суть гомотопически плоские комплексы плоских k-модулей. Предположим, что градуированный бимодуль C над C имеет конечную проективную размерность и DG-бимодуль C над C, как объект контрапроизводной категории DG-бимодулей, изоморфен гомотопически проективному DG-бимодулю. Тогда естественные отображения между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода k-линейной DG-категории C являются изоморфизмами.
- Пусть k — коммутативное кольцо конечной гомологической размерности, B — CDG-алгебра над k, плоская как градуированный k-модуль, и C — DG-категория правых CDG-модулей над B, конечно порожденных и проективных как градуированные B-модули. Предположим, что градуированный бимодуль B над B имеет конечную проективную размерность и CDG-бимодуль B над B, как объект копроизводной категории CDG-бимодулей, подлежащие градуированные бимодули которых имеют конечную проективную размерность, принадлежит минимальной триангулированной категории, содержащей внешние тензорные произведения левых и правых CDG-модулей над B, подлежащие градуированные B-модули которых конечно порождены и проективны. Тогда естественные отображения между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода k-линейной DG-категории C являются изоморфизмами.
- Если C — кофибрантная k-линейная DG-категория (в смысле модельной структуры Г. Табуады на DG-категориях), то естественные отображения между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода для C являются изоморфизмами.
- Пусть k — коммутативное кольцо конечной гомологической размерности, B — CDG-алгебра над k, плоская как градуированный k-модуль, подлежащая градуированная алгебра которой нетерова слева и справа и имеет конечную гомологическую размерность, и то же относится к ее тензорному произведению над k на ее противоположную градуированную алгебру. Предположим, что CDG-бимодуль B над B принадлежит минимальной триангулированной категории абсолютной производной (= копроизводной = контрапроизводной) категории CDG-бимодулей, содержащих производные внешние тензорные произведения левых и правых CDG-модулей и замкнутой относительно бесконечных прямых сумм. Это такое условие "существования резольвенты диагонали". Тогда естественные отображения между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода для соответствующей DG-категории C (как выше) являются изоморфизмами.
- Пусть k — совершенное поле, B и $\mathcal{C}$ — двойственные кошулевы CDG-алгебра и CDG-коалгебра над k (как в п. 1.4), градуированные абелевой группой, не содержащей кручения порядка, равного характеристике k. Предположим, что ограничения дифференциала и функционала

кривизны $\mathcal{C}$ на максимальную кополупростую (градуированную) подкоалгебру градуированной коалгебры $\mathcal{C}$ тривиальны. Тогда естественные отображения между (ко)гомологиями Хохшильда первого и второго рода для DG-категории C, соответствующей CDG-алгебре B (как выше) являются изоморфизмами.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

2.1. Вышла из печати статья: Roman Bezrukavnikov, Leonid Positselski. On semi-infinite cohomology of finite-dimensional graded algebras. *Compositio Math.* **146**, #2, p. 480–496, 2010.

2.2. Вышла из печати монография: Leonid Positselski. Homological algebra of semimodules and semicontramodules: Semi-infinite homological algebra of associative algebraic structures. Appendix C in collaboration with D. Rumynin. Appendix D in collaboration with S. Arkhipov. Monografie Matematyczne, vol. 70, Birkhäuser/Springer Basel, 2010. xxiv+349 pp.

2.3. Принят к печати в серии *Memoirs AMS* и опубликован в электронном виде мемуар: Leonid Positselski. Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence. v+133 pp.

См. `http://www.ams.org/journals/memo/0000-000-00/S0065-9266-2010-00631-8/home.html`

2.4. Опубликован препринт `arXiv:1006.4343 [math.KT]`, 83 стр. В настоящее время эта работа рассматривается в журнале Moscow Mathematical Journal.

2.5. Опубликован препринт `arXiv:1007.5010 [math.KT]`, 6 стр. В настоящее время эта работа рассматривается в журнале "Функциональный анализ и его приложения".

2.6. Опубликован препринт `arXiv:1008.0095 [math.KT]`, 23 стр. Эта работа подана в Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal).

2.7. Опубликован препринт `arXiv:1010.0982 [math.CT]` авторства Alexander Polishchuk and Leonid Positselski, 62 стр. Эта работа подана в журнал Transactions of the American Mathematical Society.

3. Участие в конференциях, доклады на семинарах

3.1. Я участвовал в конференции The First International Conference on Mathematics and Statistics, American University of Sharjah (AUS–ICMS'10) проходившей в Шардже, ОАЭ с 18 по 21 марта 2010 года. Принимал участие в работе специальной сессии по алгебрам и коалгебрам, где сделал получасовой доклад на тему Coalgebras over Algebras vs. Algebras over Coalgebras.

См. `http://www.aus.edu/conferences/icms10/`

3.2. Я участвовал в конференции Algebraic Geometry, K-theory, and Motives, посвященной 60-летию А. А. Суслина и проходившей в Санкт-Петербурге с 25 по 29 июня 2010 года. Я не делал доклада на этой конференции, но имел полезные беседы с ее участниками.

См. `http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2010/ag/`

3.3. Я сделал двухчасовой доклад на тему "Экзотические производные категории" на семинаре сектора алгебры и теории чисел ИППИ РАН 6 апреля 2010 года.

См. `http://www.iitp.ru/ru/ru/science/seminars/465.htm`

3.4. Я сделал серию из двух двухчасовых докладов на тему "Мотивы Тейта с конечными коэффициентами" на совместном семинаре по теории чисел Лаборатории Понселе НМУ и сектора алгебры и теории чисел ИППИ РАН, 19 октября и 2 ноября 2010 года.

См. `http://www.iitp.ru/ru/ru/science/seminars/519.htm`

3.5. Я сделал серию из двух двухчасовых докладов на тему "Смешанные мотивы Артина–Тейта с конечными коэффициентами" на семинаре "Гомологические методы в алгебраической геометрии" в МИ РАН им. Стеклова, 29 октября и 12 ноября 2010 года.

См. `http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=9&confid=152` или `http://www.mi.ras.ru/index.php?c=seminars&m=2`

4. Итоги за три года

Осенью 2007 года сложилась удачная ситуация, когда доказательства основных результатов полубесконечной гомологической алгебры, являвшихся целью моей многолетней работы в этой области, находились уже в пределах досягаемости, но детали требовали проработки. Это позволило сформулировать достаточно реалистичную заявку на грант, и поставленные в ней цели были в итоге в основном достигнуты. В 2010 году мои работы, содержащие эти результаты, были опубликованы.

Теорема сравнения полубесконечных (ко)гомологий тейтовских алгебр Ли и связанных с ними (полу)ассоциативных полуалгебр, над которой я работал вместе с С. Архиповым, была нами доказана к лету 2008 года. Доказательство изложено в Приложении D к книге Homological Algebra of Semimodules and Semicontramodules, вышедшей в серии Monografie Matematyczne издательства Birkhaüser/Springer Basel в 2010 году.

Пример полуалгебры над кокольцом, связанной с парой (аффинный алгебраический группоид, подгруппоид с тем же многообразием объектов) рассмотрен в Приложении F. Эквивалентность категорий левых и правых полумодулей над этой полуалгеброй доказана.

Теория относительной неоднородной кошулевой двойственности над базовым кокольцом построена в главе 11 той же книги. Показано, что эта двойственность преобразует функторы SemiTor и SemiExt над кошулевой полуалгеброй в функторы Cotor и Coext над квадратично двойственным к ней квазидифференциальным кокольцом, как и предполагалось в заявке.

Интерпретация полубесконечных когомологий конечномерной градуированной алгебры в терминах морфизмов между объектами двух разных триангулированных категорий через их общую подкатегорию, над которой мы работали вместе с Р. Безрукавниковым (обобщая результаты из его предшествовавшей работы) была получена. Эта конструкция изложена в нашей статье On semi-infinite cohomology of finite-dimensional graded algebras, опубликованной в 2010 году в журнале Compositio Math.

План написать подробный текст по относительной кошулевой двойственности осуществился не в той форме, которая предполагалась в заявке. В 2009 году была написана длинная статья Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence о производной кошулевой двойственности над полем (сейчас уже опубликованная в электронном виде в Memoirs AMS и ожидающая выхода на бумаге). В Приложении B к этой статье разбирается один частный случай относительной двойственности, представляющий особый интерес – эквивалентность производной категории D-модулей над гладким алгебраическим многообразием и ко/контрапроизводной категории DG-модулей над его комплексом де Рама.

Более общая и сложная ситуация с полуалгеброй и квазидифференциальным кокольцом рассматривается в главе 11 книжки по полубесконечной гомологической алгебре (см. выше). В то же время, наиболее общая ситуация с дифференциальной полуалгеброй остается пока не рассмотренной.

Задачу по обобщению полубесконечных когомологий на случай полуалгебр над кокольцами над кольцами бесконечной гомологической размерности решить не удалось. В то же время, для коколец над кольцами бесконечной гомологической размерности можно построить теорию функторов ProCotor и IndCoext, воспользовавшись переходом к проабелевым группам или провекторным пространствам, переставляющим роли алгебр и коалгебр. Эти конструкции обсуждаются в Замечаниях 2.7 и 4.7 к моей монографии. Другой подход к этой проблеме обозначен в Вопросе 4.7. Конструкция комодульно-контрамодульного соответствия обобщается на случай горенштейнова базового кольца (см. обсуждение при Вопросе 5.4 в той же книжке).

В 2010 году я работал преимущественно над некоторыми вопросами теории мотивов и когомологий Галуа, а также (ко)гомологий Хохшильда второго рода, не поднимавшимися в заявке на настоящий грант.

Итоговый отчет по педагогическим планам и их выполнению: как и предполагалось в заявке, были прочитаны два курса по полубесконечной гомологической алгебре — семестровый спецкурс осенью 2008 года в НМУ и миникурс весной

2009 года через интернет по заказу Физматклуба при ПОМИ. См. мои отчеты за соответствующие годы.