

1. Результаты 2010 года

Работа была посвящена проблеме индекса для нелокальных эллиптических операторов, отвечающих *произвольному* диффеоморфизму $g : X \rightarrow X$ гладкого замкнутого многообразия X ([1, 2]). Рассматриваемые операторы имеют вид конечной суммы

$$D = \sum_k D_k T^k : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X), \quad (1)$$

где D_k — (псевдо)дифференциальные операторы (ПДО) на многообразии X , а T^k — k -я степень оператора сдвига $Tu(x) = u(g(x))$.

При выполнении условия эллиптичности нелокальный оператор (1) является фредгольмовым в подходящих пространствах Соболева, и возникает задача о вычислении его индекса $\text{ind} D = \dim \ker D - \dim \text{coker} D$ в терминах символа. Формулы индекса для эллиптических операторов вида (1) были ранее получены для ряда специальных диффеоморфизмов g : когда диффеоморфизм порождает конечную группу и, более общим образом, когда он включается в компактную группу диффеоморфизмов. Отметим, что в этих случаях действие является изометрическим.

Цель исследований этого года состояла в том, чтобы рассмотреть проблему индекса для произвольного диффеоморфизма. Основным результатом является равенство

$$\text{ind} D = \text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) \quad (2)$$

индекса нелокального оператора (1) и индекса некоторой краевой задачи $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ на цилиндре $X \times [0, 1]$, в которой краевое условие связывает значения неизвестной функции на основаниях $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ цилиндра. При этом краевая задача выписывается в явном виде в терминах символа оператора D . Так как формула индекса для краевых задач такого типа была получена ранее, то формула (2) приводит к выражению индекса оператора D в топологических терминах.

К сожалению, в общем случае символ оператора (1) является достаточно сложным объектом¹, а условие эллиптичности трудно проверяемо. В этой ситуации интерес представляют те операторы, для которых краевая задача в (2) имеет достаточно простой вид. Примерами таких операторов являются (*специальные*) *двучленные операторы*:

$$D = ATP + (1 - P), \quad (3)$$

где A, P — псевдодифференциальные операторы, причём оператор P является почти проектором ($P^2 = P$ с точностью до компактных операторов). Оператор (3) эллиптический, если символ $\sigma(A)$ оператора A осуществляет изоморфизм расслоений $\text{Im} \sigma(g^*P)$ и $\text{Im} \sigma(P)$, определяемых диффеоморфизмом g и символом оператора P . В случае, когда $\dim X = 2$, т.е. рассматривается оператор на двумерном многообразии, из (2) получается формула индекса:

$$\text{ind} D = \frac{1}{(2\pi i)^2 3!} \int_{S^*X} \text{tr} [2\alpha^3 + 6\alpha\Omega + 3\alpha p d\alpha - 3\alpha^2 dp]$$

¹Он является элементом скрещенного произведения алгебры символов ПДО и группы \mathbb{Z} .

где $a = \sigma(A)$, $p = \sigma(P)$, $\Omega = pdpdp$, $\alpha = ad(a^{-1})$, а S^*X — косферическое расслоение многообразия X .

Кроме вышеизложенных результатов в этом году была также выполнена работа [7], в которой вычисляется индекс для *трансляторов* — важного класса эллиптических операторов, возникающего на многообразиях с особенностями типа трансверсальных пересечений гладких подмногообразий.

2. Публикации 2010 года

Список литературы

- [1] А. Ю. Савин. Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом многообразия. *Доклады академии наук*, **435**, No. 2, 2010, 170–172.
- [2] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Об индексе нелокальных эллиптических операторов для группы растяжений. *Доклады академии наук*, **433**, No. 1, 2010, 21–24.
- [3] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^* -алгебрами. *Матем. сб.*, **201**, No. 3, 2010, 63–106.
- [4] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли. *Доклады академии наук*, **431**, No. 4, 2010, 457–460.
- [5] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры. *Труды МИАН*, **271**, 2010, 204–223.
- [6] А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Формулы индекса для стратифицированных многообразий. *Дифференц. уравнения*, **46**, No. 8, 2010, 1135–1146.
- [7] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Об индексе эллиптических трансляторов. *Доклады академии наук*, **436**, No. 4, 2011.

3. Участие в конференциях и школах

1. Всероссийская конференция “XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии”, Москва, РУДН, 19-23 апреля 2010 г.
2. Международная конференция “Analysis and geometric singularities” 27.06. - 03.07.2010, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany.
3. Международная конференция “ K -theory, C^* -algebras and index theory”, Göttingen, Germany, 1 - 5 November 2010.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Летом 2010 года я работал научным сотрудником в институте математики Ганноверского университета им. Г.В. Лейбница в рамках немецко-российского проекта N 436 RUS 113/849/0-1® “ K -theory and noncommutative geometry of stratified manifolds”. Проект финансируется Deutsche Forschungsgemeinschaft.

5. Педагогическая деятельность в Российском университете дружбы народов (РУДН)

1. Читаю лекции и веду семинары по математике.
2. Научное руководство аспирантом Нгуен Ле Линем (Вьетнам) (совместно с проф. Б.Ю. Стерниным)
3. Читаю специальный курс для аспирантов и сотрудников “О проблеме индекса в эллиптической теории”. (совместно с проф. Б.Ю. Стерниным)

6. Итог трех лет (сравнение заявки с достигнутыми результатами).

Приведем краткое сравнение основных задач, которые ставились в заявке в 2007 году, с полученными к концу 2010 года результатами в виде таблицы.

Задача из заявки 2007 года	Полученные к 2010 году результаты
1. Получить формулу индекса (типа Атьи–Зингера) для нелокальных операторов в случае изометрического действия дискретной группы	Предъявлена формула индекса для нелокальных операторов в случае изометрического действия произвольной дискретной группы степенного роста. Для этого доказан аналог теоремы периодичности Ботта, теоремы Римана–Роха, построено отображение прямого образа и характер Черна на K -группах скрещенных произведений. Публикации: 1 монография и 3 статьи.
2. Определить и вычислить в топологических терминах высшие индексы (типа Конна–Московичи) нелокальных эллиптических операторов	Построена эллиптическая теория для нелокальных операторов над C^* -алгебрами. В этой ситуации получена формула индекса. В качестве приложения получены высшие индексы и формулы для них. Публикации: 2 статьи.
3. Получить формулы индекса для нелокальных операторов для неизометрических действий.	Для нелокального эллиптического оператора, ассоциированного с произвольным действием группы \mathbb{Z} на гладком многообразии получена формула индекса в топологических терминах (в терминах символа оператора). Исследованы примеры. В частности, рассмотрен класс нелокальных операторов, ассоциированных с группой растяжений. Публикации: 2 статьи.
4. —	Построена эллиптическая теория для нелокальных операторов, отвечающих действию компактной группы Ли. Установлена теорема конечности и получена формула индекса. Публикации: 1 статья.

Из таблицы видно, что задачи 1,2,4 (последней задачи не было в исходной заявке!) решены полностью. В задаче 3 полностью исследован случай действия группы \mathbb{Z} , а для общих групп проблема индекса остается открытой.