ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2011 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

1. Научные публикации

В работе [2] мы изучали обобщения замечательной теоремы Реттрея: всякое нечётное непрерывное отображение $S^{n-1} \to S^{n-1}$ переводит некоторый ортонормальный базис в ортонормальный базис. Это утверждение — нелинейный аналог теоремы об ортогонализации (или о полярном разложении). В.В. Макеев обнаружил, что топологическое утверждение, лежащее в основе теоремы Реттрея позволяет доказывать некоторые утверждения о делении мер. В нашей работе мы также обобщаем эти теоремы о делении мер.

В работе [3] доказано обобщение теоремы Неймана–Радо о центральной точке, в котором вместо конечного набора точек в евклидовом пространстве рассматривается отображение симплекса в конечномерное пространство. Показано, что верны и аналогичные обобщения теоремы Тверберга, но оказывается, что в общем случае отображения в конечномерное пространство размерность симплекса приходится увеличить по сравнению с теоремой Тверберга для отображений в евклидово пространство или многообразие. Также указано на связь этих результатов с теоремой К. Ситникова о поперечнике Александрова.

В работе [4] доказываются утверждения следующего вида: если даны d абсолютно непрерывные меры в $\mathbb{R}^d$, то некоторое выпуклое разбиение пространства на q частей делит на равные части каждую меру. Помимо мер частей можно рассматривать также другие непрерывные функции выпуклых частей, например: любую выпуклую фигуру на плоскости можно разбить на q выпуклых частей с равными площадями и периметрами. Топологическое доказательство (использующее одну лемму В.А. Васильева) требует, чтобы число q было степенью простого. Также следует отметить, что аналогичные результаты для $q = 2^\ell$ использовались М. Громовым для доказательства теоремы о поперечнике сферы. Сделана попытка доказать теорему Н. Алона о делении мер на отрезке с помощью этой техники, но оказалось, что теорема получается с худшей оценкой количества частей — на некоторый очень слабо растущий множитель.

В заметке [5] приведено сильно упрощённое доказательство М. Громова теоремы о вероятности покрытии точки симплексом. В результате размер доказательства сократился до фактически одной страницы и из неэлементарных понятий в нём используется только степень кусочно-гладкого отображения. Это упрощение было важным, так как в большинстве своём специалисты, интересующиеся такими результатами, не владеют топологической техникой (симплициальные приближения пространств циклов, симплициальный аналог теоремы Дольда–Тома–Альмгрена и т.п.), использованной М. Громовым в его доказательстве.

В работе [6] мы обобщаем теорему Громова о поперечнике сферы на случай отображений в произвольные многообразия (а не только в евклидово пространство). Для этого достаточно указать соответствующий аналог теоремы Борсука–Улама с помощью развитой ранее А.Ю. Воловиковым техники.

В работе [7] мы изучаем вопрос, который можно сформулировать так: можно ли всякому набору из q попарно различных точек $x_1, \dots, x_q$ на сфере S^n поставить в соответствие точку $f(x_1, \dots, x_q)$ на той же сфере, чтобы это соответствие было инвариантным относительно перестановок точек и всякую точку x_i можно было бы соединить путём с $f(x_1, \dots, x_q)$, так чтобы этот путь непрерывно и инвариантно относительно перестановок зависел от набора точек? В этой статье мы даём отрицательный ответ на этот вопрос для многих значений параметров (q, n), но остаются и открытые случаи. Используется в основном топологическая техника связанная с делимостью инварианта Хопфа отображений.

В работе [8] для всякого выпуклого разбиение выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^d$ мы пытаемся поместить гомотетичную копию B в каждое множество разбиения так, чтобы сумма соответствующих коэффициентов гомотетии была не менее 1. На плоскости это возможно для любого разбиения, в более высоких размерностях нам удаётся это сделать только для разбиений специального вида. Эта задача имеет много общего с гипотезой Банга о покрытии полосками, однако собственно по гипотезе Банга мы пока не сделали никаких продвижений.

В работе [9] полученные ранее результаты о кратности отображения проективного пространства в евклидово применяются для исследований пары классических вопросов Б. Грюнбаума: Сколько аффинных диаметров выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ гарантированно проходят через одну точку? Сколько центров (в некотором разумном смысле) гиперплоских сечений выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ гарантированно совпадут? Грюнбаум предполагал, что ответ на эти вопросы — $n+1$, однако топологические методы пока позволяют доказать оценки похуже.

В работе [10] мы рассматриваем следующий вопрос: можно ли вписать в выпуклый многогранник P правильный октаэдр? Под словом «вписать» мы подразумеваем расположить октаэдр так, чтобы его вершины лежали на границе P. Для гладких выпуклых тел вместо многогранника P, и даже для гладко вложенных 2-сфер, положительный ответ был получен Макеевым. Но стандартный «переход к пределу» не позволяет сразу вывести утверждение для многогранника из утверждения для гладкой поверхности. В этой работе мы достаточно аккуратно проводим предельный переход и решаем вопрос положительно для простых многогранников P. Случай непростых P с достаточно «острыми» углами, вообще говоря, остаётся открытым.

В работе [11] мы изучаем число Турана $ex(H, n)$ графа H — это максимальное количество рёбер в графе G на n вершинах, не имеющем подграфа, изоморфного H. Для полных двудольных графов $H = K_{s,t}$ существуют конструкции G с большим числом рёбер, заданные алгебраическим соотношением между парой точек в $\mathbb{F}_p^d$. В этой работе мы изучаем отношения на $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{C}^d$, которые определены над целыми числами, и таким образом дают графы над $\mathbb{F}_p$, для которых можно указать асимтотическое (с ростом p) число рёбер. Мы доказываем, что всякая гиперповерхность в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ содержит решётку (то есть произведение конечных множеств $S \times T$) размера примерно $(2d-3) \times (2d-3)$ по топологическим причинам. Это исключает конструкции интересных с точки зрения числа Турана графов, свободных от $K_{s,s}$, при s больших 3. С другой стороны, мы конструируем гиперповерхности в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ без решёток размера $d \times d^{4d}$. Построение поверхностей без решёток $d \times d^2$, например, пока остаётся открытым вопросом.

Текущая информация о моих публикациях доступна также на сайте www.rkarasev.ru.

2. Конференции и международное сотрудничество

- Конференция «Topological and Geometric Combinatorics» в Обервольфахе, Германия.
- Конференция «Discrete Geometry» в Обервольфахе, Германия.
- Конференция «Convexity, Topology, Combinatorics, and Beyond» в г. Пуэрто-Вальярта, Мексика.
- Работа в течении месяца в Математическом институте им. А. Реньи в Будапеште совместно с И. Баранем (I. Bárány) и И. Матушеком (J. Matoušek).

3. Преподавательская деятельность

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в олимпиаде им. В. Ярника в г. Острава, Чехия и в IMC 2011 в г. Благоевград, Болгария.

4. Итоги трёх лет

Из задач, предложенных в моей заявке три года назад, некоторые решить удалось, некоторые — нет. Отмечу некоторые положительные и отрицательные результаты:

- Гипотеза 3 о кратности отображения проективного пространства в евклидово пространство той же размерности доказана в более общей формулировке. В работе [9] даны некоторые её следствия. Но в задачах о кратности отображений ещё много открытых вопросов.
- Гипотеза 5 (гипотеза Б. Грюнбаума) о делении меры в четырёхмерном пространстве пока остаётся открытой. В статье Р. Живалевича (R. Živaljević) было проведено вычисление топологических препятствий, которое дало отрицательный результат. В моём неопубликованном тексте подход Живалевича был несколько усилен, но топологические препятствия обнаружить не удалось.
- Гипотеза 6 (оказалось, что эта гипотеза принадлежит М. Громову и была упомянута в статье В. Мильмана 1988 года) доказана, хотя никакого явного выражения для функции $N(k, d)$ не установлено. Таким образом, открытые вопросы ещё остаются.
- Гипотеза 7 о неподвижной точке отображения компакта на плоскости в себя остаётся открытой. Эта старая гипотеза действительно сложна.
- Удалось достигнуть некоторого понимания в задачах деления пространства на выпуклые части с равными мерами (или другими достаточно непрерывными параметрами), см. работу [4].
- Также хотелось бы отметить новые идеи М. Громова о «стягивании в пространстве (ко)циклов»[1], которые мне посчастливилось понять (см. [5]) и применить в некоторых результатах, которые сейчас находятся в работе.

Список литературы

[1] M. Gromov, "Singularities, expanders, and topology of maps. Part 2: from combinatorics to topology via algebraic isoperimetry.", *Geometric and Functional Analysis*, **20**:2 (2010), 416–526.

[2] P.V.M. Blagojević and R.N. Karasev, *Extensions of theorems of Rattray and Makeev*, arXiv:1011.0869, 2010.

[3] R.N. Karasev, arXiv:1011.1802, 2011 doi doi:10.1016/j.topol.2011.12.002.

[4] R.N. Karasev, *Equipartition of several measures*, arXiv:1011.4762, 2010.

[5] R.N. Karasev, “A simpler proof of the Boros—Füredi-–Bárány-–Pach-–Gromov theorem”, *Discrete and Computational Geometry*, 2011 doi 10.1007/s00454-011-9332-1.
[6] R.N. Karasev and A.Yu. Volovikov, *Waist of the sphere for maps to manifolds*, arXiv:1102.0647, 2011.
[7] R.N. Karasev and P. Landweber, *Estimating the higher symmetric topological complexity of spheres*, arXiv:1106.1549, 2011.
[8] A.V. Akopyan and R.N. Karasev, *Kadets type theorems for partitions of a convex body*, arXiv:1106.5635, 2011.
[9] R.N. Karasev, *Geometric coincidence results from multiplicity of continuous maps*, arXiv:1106.6176, 2011.
[10] A.V. Akopyan and R.N. Karasev, *Inscribing a regular octahedron into polytopes*, arXiv:1107.4428, 2011.
[11] P.V.M. Blagojević, B. Bukh, R.N. Karasev, *Turán numbers for $K_{s,t}$-free graphs: topological obstructions and algebraic constructions*, arXiv:1108.5254, 2011.