

ИТОГОВЫЙ ОТЧЁТ
СТИПЕНДИАТА ФОНДА «ДИНАСТИЯ»
А. В. УСТИНОВА

В 2011 году опубликована одна монография [1] и две научных статьи ([2, 3]), статьи [4, 8] приняты в печать.

Выступил в качестве редактора перевода книги Иванца и Ковальского «Аналитическая теория чисел» (изд-во МЦНМО, готовится к печати).

Краткое изложение результатов 2011 года

[1] Дано изложение результатов, полученных за последние годы с помощью цепных дробей и оценок сумм Клостермана. В частности, изложены результаты, полученные за время выполнения проекта.

[2] Доказывается асимптотическая формула для среднего значения статистик Гаусса — Кузьмина, лежащих в коротких интервалах. Статья продолжает серию работ, восходящую к задаче Арнольда о статистиках Гаусса — Кузьмина для конечных цепных дробей. Остаточный член в асимптотической формуле оказывается лучше, чем в классическом результате Портера 1975 г. о средней длине конечных цепных дробей. Вместе с дополнительными соображениями это позволяет уточнить и сам результат Портера ([5] — готовится к печати).

[3] Получено новое, наглядное доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса. Доказательство использует геометрическую теорию цепных дробей. Формула Рёдсета лежит в основе ранее полученных результатов о поведении чисел Фробениуса в среднем.

[4] Алгоритм Вороного для поиска единиц в комплексных кубических полях основан на геометрических свойствах трехмерных решеток. Ключевую роль в алгоритме играет теорема Вороного о цилиндрических минимумах решеток общего положения. В оригинальном доказательстве теоремы Вороного и ее переизложении, данном Делоне и Фаддеевым, часть содержательных случаев не была разобрана. В работе дается полное доказательство теоремы Вороного. Кроме того, теорема распространяется на случай произвольных решеток.

[8] Научно-популярная статья, посвященная теореме Пойа о возвращаемости случайных блужданий по двумерной и трехмерной решеткам. Обсуждается связь случайных блужданий с гармоническими функциями и сопротивлениями графов.

Публикации за 2011 год¹

- [1] УСТИНОВ А. В. Приложения сумм Клостермана в арифметике и геометрии. — *Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing*, 2011 (232 стр.).
- [2] УСТИНОВ А. В. О статистиках Гаусса — Кузьмина в коротких интервалах. — *Дальневосточный математический журнал*, 11:1 (2011), 93–98.
- [3] УСТИНОВ А. В. К теореме Вороного о цилиндрических минимумах трехмерных решеток. — *Дальневосточный математический журнал*, 11:2 (2011), 213–221.
- [4] УСТИНОВ А. В. Геометрическое доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса. — Труды Математического института им. В.А. Стеклова (10 стр., принята в печать).
- [5] БЫКОВСКИЙ В. А., УСТИНОВ А. В. Уточнение теоремы Портера о средней длине алгоритма Евклида (готовится к печати).
- [6]* БАРАНОВ Д., СКОПЕНКОВ М., УСТИНОВ А. Сопротивление между узлами решетки. — *Сборник «Математическое Просвещение»*, третья серия, выпуск 15 (2011), 229–230.
- [7]* УСТИНОВ А. В. Сундуки и протоколы: криптография без формул. — *Тезисы докладов Первого краевого съезда учителей и преподавателей математики*. Хабаровск, ТОГУ, 2011, 99–101.
- [8] СКОПЕНКОВ М., СМЫКАЛОВ В., УСТИНОВ А. Случайные блуждания и электрические цепи. — *Сборник «Математическое Просвещение»*, третья серия, выпуск 16 (2012), (17 стр., в печати).

Участие в школах и конференциях

1. Рождественский семинар фонда «Династия», Москва, МЦНМО 08.01.2011–10.01.2011. Задачи на решетках;
2. Первый краевой съезд учителей и преподавателей математики Хабаровского края, Хабаровск 30.03.2011–31.03.2011. Сундуки и протоколы: криптография без формул;
3. Летняя школа «Современная математика», Дубна, 18.07.2011–29.07.2011. Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса-Кузьмина для конечных цепных дробей;
4. Международная конференция «Торическая топология и автоморфные функции», Хабаровск, 05.09.2011–10.09.2011. Без доклада, организатор;

¹Звездочкой помечены заметки, вышедшие без ссылки на фонд «Династия»

5. Школа молодых ученых Хабаровского края, Хабаровск, 29.08.2011–01.09.2011. Криптография без формул;
6. Летняя математическая олимпиадная школа СУНЦ МГУ, Москва, СУНЦ МГУ, 13.06.2011–23.06.2011. Цепные дроби;
7. Конференция «Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения», Минск, Белоруссия, 03.07.2011–09.07.2011. Зачем нужны статистики Гаусса-Кузьмина?;
8. Конференция «27th Journees Arithmetiques», Вильнюс, Литва, 27.06.2011–01.07.2011. О распределении чисел Фробениуса.

Педагогическая деятельность

Участвовал в проведении летней олимпиадной школы СУНЦ МГУ, летней школы «Современная математика» (прочитан курс «Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей.»). Готовил школьников к участию в региональной и всероссийской олимпиадах. Готовил и проводил дальневосточную студенческую олимпиаду. Ученик И. С. Воробьев защитил диплом на тему «Экспериментальное исследование проблемы Фробениуса для трех аргументов».

Сравнение заявки с достигнутыми результатами

В заявке предполагался следующий план исследований.

1. Исследовать статистические свойства произвольных (не обязательно начинающихся в окрестности целой точки) траекторий в двумерном бильярде Синая. Применить трехмерную теорию цепных дробей, разработанную Минковским и Вороным, и методы аналитической теории чисел к изучению трехмерного бильярда Синая.
2. Вычислить (явно) предельную плотность распределения нормированных чисел Фробениуса $f(a, b, c)/\sqrt{abc}$. Решить задачи Арнольда (зад. 1999–9 и 1999–10 из книги «Задачи Арнольда») о распределении чисел, не представимых в виде $ax + by + cz$ с натуральными коэффициентами x, y, z .
3. Применить метод тригонометрических сумм к доказательству центральной и локальной предельной теорем для числа шагов в алгоритме Евклида.
4. Применить спектральную теорию автоморфных форм для уточнения остаточных членов в уже известных результатах.

В процессе выполнения проекта удалось добиться следующих результатов.

1. Задача решена частично, получены предварительные результаты [2009.4], [2009.6]. При анализе трехмерного бильярда Синая предполагалось применить теорию трехмерных цепных дробей, разработанную Минковским и Вороным. Обоснование алгоритма Вороного (Делоне Б. Н., Фаддеев, Д. К. Теория иррациональностей третьей степени. М.-Л.: изд-во АН СССР, 1940, глава IV) оказалось неполным. Полная версия этого обоснования опубликована в [4]. Аналитический аппарат должен был базироваться на идеях статьи Линника и Скубенко (Линник Ю. В., Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка. Вестник ЛГУ, 1964, 13, 25-36). При детальном анализе этой работы оказалось, что это доказательство также содержит лакуны. В ближайшем будущем планируется дать полное переизложение идей Линника и Скубенко и все-таки применить их к анализу трехмерного бильярда Синая и для решения других задач на трехмерных решётках.
2. Задача решена полностью, получены дополнительные результаты. Предельная плотность распределения нормированных чисел Фробениуса $f(a, b, c)/\sqrt{abc}$ вычислена явно [2010.1]. Задача Арнольда 1999–9 решена в существенно более сильной формулировке. Кроме слабой асимптотики (полученной в [2009.1]) найдена плотность распределения. Она выделена при усреднении по двум из трёх аргументов. В остаточном члене получено явное степенное понижение. Дано также альтернативное доказательство существования плотности распределения [2009.2, 2009.3]. Дано новое доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса [3], которая играет ключевую роль в упомянутых выше результатах.
Оказалось, что решение задачи Арнольда 1999–10 из книги «Задачи Арнольда» о распределении чисел, не представимых в виде $ax + by + cz$ с натуральными коэффициентами x, y, z не требует дополнительных идей для своего решения. Оно будет опубликовано моим аспирантом.
3. Заявленная задача не решена. Получены результаты в другом направлении. Проанализированы поведение в среднем наиболее распространенных, «быстрых» вариантов алгоритма Евклида [2009.5, 2010.2]. Найдены плотности совместного распределения координат в приведенных базисах случайных двумерных решёток [2010.3].
4. Задача решена полностью. Предварительный результат опубликован в статье [2], полное доказательство готовится к печати ([5]).

В основном поставленные цели достигнуты. Разработан и апробирован аппарат решения «двумерных» задач на целочисленных решётках. «Трёхмерный» случай оказался существенно сложнее. В будущем предполагается создание аппарата решения трёхмерных задач и применение его к асимптотическим задачам (из геометрии чисел, анализа алгоритмов и теоретической физики) на трехмерных решётках.

Цитированные публикации за 2009–2010 годы

- [2009.1] УСТИНОВ А. В. Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Мат. сборник*, **200**: 4 (2009), 131–160.
- [2009.2] УСТИНОВ А. В. О статистических свойствах элементов цепных дробей. — *ДАН*, **424**: 4 (2009), 459–461.
- [2009.3] SHCHUR V., SINAI YA., USTINOV A. Limiting distribution of Frobenius numbers for $n=3$. — *Journal of Number Theory*, **129**: 11 (2009), 2778–2789.
- [2009.4] УСТИНОВ А. В., БЫКОВСКИЙ В. А. Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки. — *Изв. РАН, сер. мат.*, **73**: 4 (2009), 17–36.
- [2009.5] УСТИНОВ А. В. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка. — *Мат. заметки*, **85**: 1 (2009), 153–156.
- [2009.6] УСТИНОВ А. В. О распределении точек целочисленной решетки. — *Дальневосточный мат. журнал*, **9**: 1–2 (2009), 176–181.
- [2010.1] УСТИНОВ А. В. О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Известия РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 145–170.
- [2010.2] УСТИНОВ А. В. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными. — *Математические заметки*, **88**:4 (2010), 594–604.
- [2010.3] УСТИНОВ А. В. О распределении приведенных базисов в двумерных целочисленных решетках. — тезисы Международной конференции «Геометрия, топология, алгебра и приложения», посвященной 120-летию Бориса Николаевича Делоне (2010), 143.