## Отчёт лауреата конкурса Пьера Делиня Е.П.Вдовина за 2011 год (итоговый)

**В 2011 году получены следующие результаты.**

1. Продолжено изучение размера базы транзитивной группы, в которой накладываются ограничения на стабилизатор точки. Напомним необходимые определения. Пусть группа $G$ действует транзитивно на некотором множестве $\Omega$. Минимальное число $k$, для которого существуют точки $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega$, удовлетворяющие условию: «если $g \in G$ стабилизирует точки $\omega_1, \dots, \omega_k$, то $g$ действует на $\Omega$ тривиально», называется *размером базы* группы $G$ (далее размер базы обозначается через $Base(G)$), а сами точки $\omega_1, \dots, \omega_k$ называют *базой*. База и размер базы играют важную роль в теории конечных групп, а также в компьютерных алгоритмах. Для группы $G$, действующей на множестве $\Omega$, можно определить индуцированное действие на $m$-ой декартовой степени $\Omega^k$ по следующему правилу: $g : (\omega_1, \dots, \omega_m) \mapsto (\omega_1^g, \dots, \omega_m^g)$ (здесь $\omega_i^g$ — образ точки $\omega_i$ относительно действия элемента $g$). Если группа $G$ действует точно, то точки $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega$ образуют базу группы $G$ тогда и только тогда, когда точка $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k$ является $G$-регулярной, и на множестве $\Omega^{k-1}$ не существует $G$-регулярных орбит. Если группа $G$ действует на множестве $\Omega$ точно, то обозначим через $Reg(\Omega, m)$ количество $G$-регулярных орбит на множестве $\Omega^m$. Ясно, что $Reg(\Omega, m) = 0$, если $m < Base(G)$. Хорошо известно, что транзитивное действие эквивалентно действию правыми умножениями на правых смежных классах по стабилизатору точки. Более точно, если $G_\omega$ — стабилизатор точки $\omega$ и $G : G_\omega$ — множество правых смежных классов группы $G$ по подгруппе $G_\omega$, то группа $G$ действует на смежных классах по следующему правилу $x : G_\omega y \mapsto G_\omega(yx)$ и это действие совпадает с действием группы $G$ на множестве $\Omega$. Обобщая эту ситуацию, рассмотрим произвольную группу $G$ и её подгруппу $H$ и определим действие $G$ на правых смежных классах $G : H$ как действие правыми умножениями. Размер базы и количество $G/H_G$-регулярных орбит на множестве $(G : H)^m$ обозначим через $Base_H(G)$ и $Reg_H(G, m)$ соответственно.

Ранее в 2010 году удалось доказать следующую теорему:

**Теорема.** *Пусть $G$ — конечная группа, $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ — композиционный ряд группы $G$, являющийся уплотнением некоторого её главного ряда. Предположим, что существует такое число $k$, что для каждого неабелева фактора $G_i/G_{i-1}$ и для любой разрешимой подгруппы $L$ группы $\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1})$ справедливы неравенства $Base_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1})) \leqslant k$ и $Reg_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1}), k) \geqslant 5$. Тогда для любой максимальной разрешимой подгруппы $S$ группы $G$ справедливо неравенство $Base_S(G) \leqslant k$. Более того, если $k \geqslant 6$, то неравенство $Reg_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1}), k) \geqslant 5$ всегда справедливо.*

Данная теорема сводит изучение размера базы для группы с разрешимым стабилизатором точки к аналогичному вопросу для почти простых групп. Результат выложен в arxiv.org и принят к печати в Journal of Algebra and Applications, doi:10.1142/S0219498811005403.

В 2011 году изучался размер базы почти простой группы $G$ относительно произвольной разрешимой подгруппы $S$. Используя результаты о размере базы, полученные ранее Т.Бернсом, М.Либеком и Я.Сакслом, довольно быстро удалось доказать, что если $G$ — почти простая группа и $S$ — её разрешимая подгруппа, то $Base_S(G)$ не превосходит 10. Однако, основная гипотеза состоит в том, что размер этой базы не превосходит 5, более того, за исключением нескольких явно указанных серий, он не превосходит 4, поэтому полученные результаты не оформлены в виде публикации и не будут оформлены в дальнейшем. Изучение основной гипотезы ещё не закончено, но получены существенные продвижения. В частности, она проверена для симметрических групп (и там получен положительный ответ), а также для классических групп, в том случае, когда порядок разрешимой подгруппы либо не делится на характеристику поля определения, либо эта разрешимая подгруппа является подгруппой Бореля. Оставшийся «смешанный» случай требует более детального и аккуратного анализа и этот анализ ещё не закончен.

Изучение $Base_H(G)$ в том случае, когда $G$ — произвольная конечная группа, а $H$ — её нильпотентная подгруппа, пересекающаяся тривиально с подгруппой Фиттинга группы $G$, было предложено моему студенту, Курмазову Роману Константиновичу. За 2011 год удалось доказать, что если $G$ — знакопеременная или симметрическая группа и $H$ — её нильпотентная подгруппа, то $Base_H(G) = 2$, за единственным исключением, когда $G = S_8$, $H$ — силовская 2-подгруппа группы $S_8$, при этом $Base_H(G) = 3$. Однако бОльшая часть работы в данном направлении ещё не начата, в частности, в доказательстве редукции к случаю почти простых групп сделан лишь первый шаг.

2. Пусть $\pi$ — множество простых чисел, $\pi$-подгруппа $H$ группы $G$ называется $\pi$-холловой, если индекс $|G : H|$ не делится на простые числа из $\pi$. Понятие $\pi$-холловой подгруппы естественным образом обобщает понятие силовской $p$-подгруппы. Напомним, что конечная группа $G$ обладает свойством $E_\pi$ (или принадлежит классу $E_\pi$-групп, что коротко записывается $G \in E_\pi$), если $G$ содержит $\pi$-холлову подгруппу. Если к тому же все $\pi$-холловы подгруппы группы $G$ сопряжены, то говорят, что $G$ обладает свойством $C_\pi$ ($G \in C_\pi$). Если $G \in C_\pi$ и любая $\pi$-подгруппа группы $G$ содержится в некоторой $\pi$-холловой подгруппе, то говорят, что $G$ обладает свойством $D_\pi$ ($G \in D_\pi$). В 2011 году изучалась проблема, поставленная Х.Виландом на знаменитой конференции 1979 года в Санта-Крузе (на этой конференции было анонсировано завершение классификации). Сама проблема формулируется следующим образом:

**Проблема.** Для данного множества простых чисел $\pi$ найти все конечные простые группы, все подгруппы которых обладают свойством $D_\pi$.

При изучении проблемы Виланда в совместной работе с Д.О.Ревиным и моей аспиранткой Н.Ч.Манзаевой были введены следующие классы групп: $W_\pi$ — класс групп, в котором любая подгруппа обладает свойство $D_\pi$; $V_\pi$ — класс $D_\pi$-групп, в которых любая $E_\pi$-подгруппа обладает свойством $D_\pi$; $U_\pi$ — класс $D_\pi$-групп, в котором любая надгруппа $\pi$-холловой подгруппы всей группы обладает свойством $D_\pi$. В той же работе доказана редукционная теорема о том, что произвольная конечная группа принадлежит одному из этих классов в том и только в том случае, если каждый её (неабелев) композиционный фактор лежит в соответствующем классе. Кроме того, доказано, что знакопеременные $D_\pi$-группы лежат в $W_\pi$, а спорадические $D_\pi$-группы лежат в $V_\pi$.

**Опубликованные работы (за 2009-2011 годы)**:


1. Е.П.Вдовин, «Картеровы подгруппы конечных групп», Математические труды, т. 11 (2008), № 2, 20–106. Перевод E.P.Vdovin, «Carter subgroups of finite groups», Siberian Advances in Mathematics, v. 19 (2009), № 1, 24–74.

2. Е.П.Вдовин, В.И.Зенков, «О пересечении разрешимых холловых подгрупп в конечных группах», Труды ИММ, т. 15 (2009), № 2, 74–83. Перевод E.P.Vdovin, V.I.Zenkov, «On the intersection of solvable Hall subgroups in finite groups», *Proc. Stekl. Inst. Math. Suppl. 3*, 2009, 234-243.

3. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Критерий сопряжённости холловых подгрупп в конечной группе», Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), №3, 506–516. Перевод

E.P.Vdovin, D.O.Revin, «Conjugacy criterion for Hall subgroups in a finite group», Siberian mathematical journal, v. 51 (2010), №3, 402–409.

4. D.O.Revin, E.P.Vdovin, «On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups», Journal of Algebra, v. 324 (2010), №12, 3614–3652.

5. Е.П.Вдовин, А.А.Гальт, «Строгая вещественность конечных простых групп», Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), №4, 769–777. Перевод E.P.Vdovin, A.A.Galt, «Strong reality of finite simple groups», Siberian mathematical Journal, v. 51 (2010), №4, 610–615.

Из них за 2011 год:

6. D.O.Revin, E.P.Vdovin, «Existence criterion for Hall subgroups of finite groups», Journal of Group Theory, v.14 (2011), N 1, p. 93-102.

7. А.В.Васильев, Е.П.Вдовин, «Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы», Алгебра и логика, т. 50 (2011), №4, 425-470. Перевод A.V.Vasil'ev, E.P.Vdovin, «Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group», Algebra and logic, v. 50 (2011), №4.

8. D.O.Revin, E.P.Vdovin, «Generalization of the Sylow theorem», London Mathematical Society Lecture notes series, №388 (2011), vol 2, Groups St Andrews 2009 in Bath, 488-520.

9. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Теоремы силовского типа», Успехи математических наук, т. 66 (2011), №5 (401), 3–46.

10. Е.П.Вдовин, Н.Ч.Манзаева, Д.О.Ревин, О наследуемости свойства $D_\pi$ подгруппами, *Труды ИММ*, т. 17 (2011), №4, 44-52.

Работы, сданные в печать:

1. E.P.Vdovin, «On the base size of a transitive group with solvable point stabilizer», Journal of Algebra and Application, в печати (см. http://arxiv.org/abs/1011.4341)

2. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, Л.А.Шеметков, «Формации конечных $C_\pi$-групп», Алгебра и анализ, в печати (т. 24, №1).

3. Igor P. Ivanov, Venus Keus, Evgeny Vdovin, «Abelian symmetries in multi-Higgs-doublet models», Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, http://iopscience.iop.org/1751-8121/ (в печати), ссылка на статью в архиве: http://arxiv.org/abs/1112.1660v1

**Участие в конференциях (2011 год)**:

1. The 5th De Brun Workshop, Groups, Combinatorics, Computing, 11 - 16 апреля, 2011 г., Голуэй, Ирландия. (пленарный доклад)

2. Международная конференция по алгебре и геометрии, посвящённая 80-летию со дня рождения А.И.Старостина, Екатеринбург, 22-27 августа 2011 г., (пленарный доклад)

3. Международная конференция "Алгебра и математическая логика посвящённая 100-летию со дня рождения В.В.Морозова, Казань, 25-30 сентября 2011 г., (пленарный доклад).

**Педагогическая деятельность (в 2011 году)**:

Моя магистрантка Манзаева Номина Чингизовна успешно защитила магистерскую диссертацию по теме «О наследуемости свойства $D_\pi$ подгруппами» и поступила в аспирантуру НГУ (под моим руководством). Кроме того, я являюсь научным руководителем студентов 4-го года обучения НГУ: Курмазова Романа Константиновича и Хохловой Ирины Александровны. Для студентов начальных курсов НГУ организован спецкурс Finite groups (совместно с В.Д.Мазуровым, А.В.Васильевым и Д.О.Ревиным), для студентов и аспирантов НГУ читаю спецкурс «Линейные алгебраические группы» (двухгодовой).

В 2010 году я был учёным секретарём и одним из основных организаторов международной молодёжной школы-конференции «Алгоритмические проблемы теории групп и смежных областей», которая прошла на турбазе Новосибирского государственного университета Эрлагол. В качестве лекторов были приглашены Eamonn O'Brian (Aukland, New Zealand), А.Ю.Ольшанский (МГУ и Vanderbilt University, Nashville, USA), А.В.Васильев и В.А.Чуркин (оба ИМ СО РАН). Каждый из лекторов прочёл курс из 6 или 8 лекций, курсы из 6-и лекций сопровождались также двумя семинарами (каждый), т.е. каждый из лекторов провёл по 8 занятий (каждое по 60 минут). Кроме того, молодые участники школы выступили с краткими сообщениями о своих результатов. В последний день школы я прочитал лекцию. Рабочим языком школы был английский, тексты всех приглашённых лекторов можно найти на страничке школы http://www.math.nsc.ru/conference/isc2010/. Школа прошла успешно во всех смыслах, молодые участники получили хороший стимул для дальнейшей научной работы.

Сейчас начата подготовка к проведению аналогичной школы-конференции в 2012 году.

**Участие в работе в международных группах:**

В 2012 году с 18 июля по 30 июля по приглашению принимающей стороны я посетил физический факультет университета г. Льеж (Бельгия). Там мы обсуждали математические задачи, связанные со стандартной $N$-дуплетной хиггсовской моделью, в частности, обсуждалась возможность классификации реализуемых групп автоморфизмов потенциалов, а также классификацию самих этих потенциалов. Обсуждение оказалось плодотворным, наше сотрудничество продолжается и есть надежда получить если не полное решение, то существенное продвижение в ряде важных вопросов. В данный момент сдана в печать статья о реализуемых абелевых группах потенциалов и готовятся к публикации ещё две работы. Статья, сданная в печать доступна в архиве.

**Сравнение полученных за время выполнения гранта результатов с заявкой:**

В заявке предлагалось изучать два основных направления: пересечение сопряжённых подгрупп или размер базы $Base_H(G)$ и холловы свойства в конечных группах. По первому направлению не все заявленные результаты удалось получить. Так не удалось доказать, что для любой нильпотентной подгруппы $H$ конечной группы $G$ найдутся такие $x, y \in G$, что $H \cap H^x \cap H^y \leq F(G)$. Это произошло потому, что данную задачу я предложил своему студенту, Курмазову Роману Константиновичу, и он сейчас над ней работает. Аналогичный вопрос (только для бОльшего количества сопряжённых подгрупп) планировалось исследовать и для холловых подгрупп. Но полученные результаты позволяют формулировать и доказывать более общие результаты, поэтому изучение пересечение холловых подгрупп сейчас представляется не очень показательным частным случаем и не кажется актуальным. С другой стороны, методы, которые в начале казались очень ограниченными удалось сделать универсальными и применимыми практически в любой ситуации. Поэтому проблематика исследований пересечений сопряжённых подгрупп претерпела изменения. В данный момент мне кажется наиболее важным и актуальным решение следующего вопроса: для данных конечной группе $G$ и её подгруппе $H$ что можно сказать о $Base_H(G)$, если мы знаем, как устроены аналогичные базы для индуцированных групп автоморфизмов композиционных факторов. Исследования в данном направлении активно ведутся, но пока результатов, достойных публикации, не получено.

Результаты, заявленные в холловых свойствах конечных групп, получены полностью. Более того, подготовлена и опубликована обзорная статья в «Успехах математических наук», в которой приведён подробный обзор полученных результатов, построена общая картина на сегодняшний момент, а также предложены возможные дальнейшие направления исследований. По некоторым из этих направлений исследования уже начаты моей аспиранткой Манзаевой Номиной Чингизовной и студенткой Хохловой Ириной Александровной.

Кроме того, за прошедший период изучались и решались задачи, которые никак не упоминались в первоначальной заявке. В частности, совместно с моим учеником Алексеем Альбертовичем Гальтом удалось завершить классификацию конечных простых групп, в которых каждый элемент является произведением двух инволюций (данные результаты вошли в его кандидатскую диссертацию, которую А.А.Гальт защитил в 2010 году). Совместно с А.В.Васильевым продолжено изучение структуры графа простых чисел конечных простых групп. Первая статья в данном направлении была опубликована в 2005 году, она превратилась в одну из глав докторской диссертации А.В.Васильева. Наконец, в 2011 году начато исследование новой для меня области — физики элементарных частиц, которое, по отзывам коллег-физиков, оказалось очень продуктивным и несомненно продолжится.

Все педагогические планы выполнены полностью и во многом перевыполнены. Положено начала школам-конференциям по теории групп для молодых учёных, студентов и аспирантов и я надеюсь, что эти школы станут регулярными.