

# Отчет Никольской Ольги Владимировны по гранту

## Фонда "Династия" за 2011 год

### 1. Результаты, полученные в 2011 году:

Гладкая комплексная проективная поверхность  $S$  называется КЗ поверхностью, если  $\Omega_S^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$  и  $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ .

В дальнейшем  $\pi_k : X_k \rightarrow C$  ( $k = 1, 2$ ) – сюръективный морфизм гладкого проективного 3-мерного многообразия  $X_k$  на гладкую проективную кривую  $C$ , общий геометрический слой которого является КЗ поверхностью. Мы называем семейство  $\pi_k : X_k \rightarrow C$  неизотривиальным, если существуют хотя бы два неизоморфных гладких геометрических слоя морфизма  $\pi_k$ .

В статье [2] доказаны следующие основные результаты:

**Теорема 1.** Пусть  $\pi_k : X_k \rightarrow C$  ( $k = 1, 2$ ) – проективное неизотривиальное семейство КЗ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой  $C$ . Предположим, что множества  $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$  ( $k = 1, 2$ ) не пересекаются.

Если для общих геометрических слоев  $X_{1s}$  и  $X_{2s}$  выполнены следующие условия:

- (i)  $\text{rank NS}(X_{1s})$  является нечетным числом;
- (ii)  $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s})$ ,

то для любой гладкой проективной модели  $X$  расслоенного произведения  $X_1 \times_C X_2$  верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы  $\pi_1$  и  $\pi_2$  гладкие,  $p_k = 22 - \text{rank NS}(X_{ks})$  – нечетные простые числа и  $p_1 \neq p_2$ , то для  $X_1 \times_C X_2$  верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов  $*$  и  $\Lambda$  теории Ходжа.

Здесь общность точки  $s \in C$  означает, что она принадлежит множеству  $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ , где  $\Delta_{\text{countable}}$  – счетное подмножество, зависящее от семейств  $\pi_k$ ; мы можем также предполагать, что функции  $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$  постоянны на множестве  $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$  (см. замечание 4.6).

**Теорема 2.** Пусть  $C$  – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел,  $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$  – гладкое проективное неизотривиальное семейство КЗ поверхностей, причем

для общего геометрического слоя  $X_{1s}$  число  $22 - \text{rank NS}(X_{1s}) = p_1$  является нечётным простым. Тогда для расслоенного квадрата  $X = X_1 \times_C X_1$  верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика  $B(X)$  типа Лефшеца об алгебраичности операторов  $*$  и  $\Lambda$  теории Ходжа.

Напомним, что алгебраичность оператора

$$* : H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q}), \quad (i \leq 5)$$

эквивалентна существованию такого алгебраического цикла  $Z = \sum_p n_p Z_p$  коразмерности  $i$  на  $X \times X$  с коэффициентами  $n_p \in \mathbb{Q}$ , что оператор  $*$  можно представить в виде композиции

$$H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^{10-i}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\smile_{\text{cl}_{X \times X}(Z)}} H^{10+i}(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^i(X, \mathbb{Q}),$$

где  $\text{pr}_k : X \times X \rightarrow X$  - канонические проекции.

Если гипотеза  $B(X)$  верна, то хорошо известно, что численная эквивалентность алгебраических циклов на  $X$  совпадает с гомологической, компоненты Кюннета класса диагонали  $\Delta_X \subset X \times X$  алгебраические,  $\mathbb{Q}$ -алгебра алгебраических самосоответствий на  $X$  является полупростой.

## 2. Опубликованные и поданные в печать работы:

1) О.В.Никольская, Об алгебраических циклах на расслоенном произведении гладких семейств КЗ поверхностей, Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 1-5 июля 2011 года), тезисы доклада, 150-152.

2) О.В.Никольская, Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств КЗ поверхностей, Известия РАН. Серия математическая (статья находится в редакции журнала).

## 3. Участие в конференциях и школах:

1) Участвовала в работе летней школы по алгебраической геометрии (Ярославль).

2) Участвовала в работе Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 1-5 июля 2011 года).

## 4. Работа в научных центрах и международных группах:

Работаю по гранту РФФИ 09-01-00132-а (научный руководитель Танкеев С.Г.)

## 5. Педагогическая деятельность:

Работаю ассистентом кафедры алгебры и геометрии Владимирского государственного университета имени А.Г. и Н.Г.Столетовых. Сдала экзамены кандидатского минимума по философии и иностранному языку.