Отчет по гранту фонда Династия за 2011 год

Протасов Владимир Юрьевич

Результаты, полученные в этом году

Из результатов 2011 года выделим три: метод точного вычисления совместного спектрального радиуса, новые оценки на показатель Ляпунова, основанные на применении инвариантных антинорм, и описание неотрицательных матричных полугрупп, не содержащих положительных матриц.

1. Вычисление совместного спектрального радиуса линейных операторов. Совместный спектральный радиус (joint spectral radius, далее – JSR) семейства линейных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ является показателем асимптотического роста максимального по норме произведения операторов из $\mathcal{A}$. Он определяется как $\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \max_{d_1,\ldots,d_k} \|A_{d_k}\cdots A_{d_1}\|^{1/k}$. Данный предел всегда существует и не зависит от операторной нормы в $\mathbb{R}^d$. Совместный спектральный радиус появился в 1960 г. в работе Рота и Стрэнга, и с тех пор нашел множество применений в функциональном анализе, комбинаторике, и т.д. В частности, в теории всплесков, совместный спектральный радиус специальных матриц отвечает за гладкость построенной всплеск-функции в пространстве $C^n(\mathbb{R}^k)$, а также в теории линейных динамических систем с переключениями: $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $A(t) \in \mathcal{A}\,,\ t \in [0, +\infty)$, где вопрос об устойчивости системы сводится к проверке неравенства $\hat{\rho}\big(e^{tA_1}, \ldots, e^{tA_m}\ \big) \ <\ 1$ при $t \in (0, \varepsilon)$. Известно, что задача вычисления JSR для произвольного семейства матриц с целыми коэффициентами NP-сложна, а задача проверки неравенства $\hat{\rho} < 1$ для матриц с рациональными коэффициентами и вовсе алгоритмически неразрешима. Как показано в конце 1990-х гг. Блонделем и Цициклисом, не существует полиномиального по переменным d и $\frac{1}{\varepsilon}$ алгоритма, который для любой пары $d\times d$-матриц вычислял бы ССР с относительной погрешностью ε. В 2011 г. в совместной работе с Н.Гуглиелми (Университет Аквила, Италия) нам удалось разработать метод вычисления JSR, который значительно эффективнее ранее известных. Более того, метод дает не приближенное, а точное значение JSR в следующем смысле: он вычисляет $\hat{\rho}(\mathcal{A})$ как собственное значение некоторой матрицы. Несмотря на то, что метод применим не для всех семейств матриц (это и невозможно, в силу упомянутых выше отрицательных результатов об алгоритмической сложности задачи), он дает успешные результаты для всех разобранных примеров из приложений, а также для всех (100 %) случайно сгенерированных семейств матриц размерностей $d \le 20$. Для неотрицательных матриц размерность повышается до 100. В качестве примера приложений нам удалось решить три открытых проблемы комбинаторики и теории формальных языков, которые сводились к нахождению JSR конкретных матриц. Результаты представлены в работе [6].

2. Показатели Ляпунова неотрицательных матриц. Показатели (экспоненты) Ляпунова – показатели роста норм произведений случайных последовательностей линейных операторов, широко изучаются в литературе, начиная с 1960-х годов, с классических работ Фюрстенберга, Кестена, Оселедца, Тутубалина, и др. С точки зрения вычисления, показатель Ляпунова еще хуже, чем совместный спектральный радиус. Так, в отличие от последнего, показатель

Ляпунова не является непрерывной функцией матриц. В случае, если все матрицы семейства $\mathcal{A}$ неотрицательны, исследование показателей Ляпунова можно осуществить с помощью понятия инвариантного функционала (“антинормы”), определенного в работе [3]. Вычисляя аффинный функционал наилучшего приближения для инвариантной антинормы (это делается методами выпуклой оптимизации) мы получаем эффективные двусторонние оценки на показатель Ляпунова, которые значительно улучшают ранее известные оценки Кея (1990), Харави и Анантарама (2005) и др. Применяя эти оценки к произведениям заданной длины, получаем эффективный алгоритм вычисления показателей Ляпунова. В размерностях $d \le 30$ метод дает значения с ошибкой порядка $1-2\%$. Результаты изложены в работах [9] (совместно с Р.Юнгерсом) и [3].

3. Полугруппы неотрицательных матриц. В связи с изучением показателей Ляпунова возникает естественная задача охарактеризовать конечные семейства неотрицательных матриц, которые имеют хотя бы одно положительное произведение. Эта задача находит применения при исследовании неоднородных цепей Маркова, она тесно связана с рядом задач эргодической теории (например, о перемешивающих (scrambling) семействах матриц, и т.д.). В работе [7] (совместно с А.С.Войновым) мы получаем классификацию семейств матриц, не имеющих положительных произведений. Доказано, что для любого такого семейства, при достаточно общих условиях, существует разбиение множества базисных векторов на непересекающиеся подмножества, на котором каждая из матриц действует как перестановка. Доказано, что существует единственное неприводимое разбиение, а число его элементов равно минимальной общей кратности наибольшего по модулю собственного значения в соответствующей мультипликативной полугруппе матриц. Это обобщает теорию Перрона-Фробениуса с одной матрицы на произвольное семейство неотрицательных матриц. Из данного результата получено несколько следствий. В частности, существование положительного произведения у заданных матриц может быть определено за полиномиальное время. В этой связи упомянем, что задача о существовании у данного семейства неотрицательных матриц *нулевого* произведения является NP-сложной (Блондель, Цициклис, 2000).

Опубликованные и поданные в печать работы

`Опубликованные.`

1. I.Ya.Novikov, V.Yu.Protasov, M.A.Skopina, *Wavelet theory*, AMS, Translations Mathematical Monographs, 239 (2011), 506 pp.

2. В.Ю.Протасов, *О линейных селекторах выпуклых многозначных отображений*, Функц. анализ и его прил., 45 (2011), no 1, 56-68.

3. В.Ю.Протасов, *Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц*, Матем. сб., 202 (2011), no 1, 105-132.

4. R.M.Jungers and V.Yu.Protasov, *Fast algorithms for the p-radius computation*, SIAM J. Scient. Comput., 33 (2011) no 1, 1246-1266.

5. V.Yu.Protasov, *Generalized closing theorems*, Elem. Math., 66 (2011), no 3, 98-117.

`Принятые.`

6. N.Guglielmi, V.Yu.Protasov, *Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators*, Found. Comput. Math. (accepted)

7. V.Yu.Protasov, A.S.Voynov, *Sets of matrices without positive products*, Linear Alg. Appl. (accepted)

8. V.Yu.Protasov, *On stability of isometries in Banach spaces*, Functional Equations in Mathematical Analysis, 52 (2012) (accepted)

`Поданные.`

9. V.Yu.Protasov and R.M.Jungers, *Convex optimization methods for computing the Lyapunov exponent of matrices*, SIAM J. Numer. Anal. (submitted)

10. Yu.Nesterov, V.Yu.Protasov, *Optimizing the spectral radius*, SIAM J. Matr. Anal. (submitted)

11. А.Р.Алимов, В.Ю.Протасов, *Отделимость выпуклых множеств экстремальными гиперплоскостями*, Фунд. и Прикл. Мат. (подана)

12. V.Yu.Protasov, *Stability of affine approximations on bounded domains*, Nonlinear analysis: stability, approximation and inequalities, dedicated to 60th birthday of Th.Rassias (submitted).

Участие в конференциях и школах

1. International conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications MMMA-2011, Москва, 22–25 июня 2011 *(пленарный доклад)* .

2. International 2011 ILAS Conference "Pure and Applied Linear Algebra: The new Generation", Брауншвейг (Германия), 22–26 августа 2011 *(секционный доклад)*

3. International workshop "Subdivision and Refinability", Понтиньяно, Сиена (Италия), 14–19 сентября 2011 *(секционный доклад)*

4. International conference on Multivariate Approximations ICMA-2011, Хаген (Германия), 24–27 сентября 2011 *(пленарный доклад)*

5. International workshop "Wavelets, Frames and Applications" Дели, Индия, 15–21 декабря 2011 *(пленарный доклад).*

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila (Аквила, Италия), февраль 2011.

Catholic University Louvail (Лоувайн-ля-Нёв, Бельгия), апрель 2011.

Sabanchi University (Стамбул, Турция), июнь 2011.

Педагогическая деятельность

`Преподавание.`

Курс *"Вариационное исчисление и оптимальное управление"* (МГУ, мех-мат).

Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.

Мини-курс *"Выпуклая геометрия: от работ Минковского к современным задачам оптимизации"* (летняя школа "Современная математика" Дубна, 2011).

`Научное руководство.`

кандидаты наук:

Сильниченко Александр, кандидатская диссертация *"Слабые жадные аппроксимации"*, защищена 13 сентября 2011.

аспиранты:

Филимонов Владислав (совм. с А.М.Райгородским), аспирантура мех-мата МГУ, 3 год.
Авксентьев Евгений, аспирантура мех-мата МГУ, 1 год,
Дементьева Елена (совм. с А.Б.Дмитруком), аспирантура ЦЭМИ, 1 год.

студенты:

Войнов Андрей (мех-мат МГУ, 4 курс), Киселева Ольга (мех-мат МГУ, 3 курс);

стажеры:

Торстен Куд (университет Мюнхен, Германия), стажировка на мех-мате МГУ, 2011-1012

`Работа со школьниками.`

Научное руководство дипломной работой Андрея Попеску (11 класс, лицей 1514);
Организация и работа в жюри геометрической олимпиады им. Шарыгина;
Работа в редколлегии журнала "Квант".
Лекции для школьников на малом мех-мате, в лицее 1514, и т.д.