Отчет по гранту фонда Династия за 2012 год

Протасов Владимир Юрьевич

Результаты, полученные в этом году

В числе результатов, полученных в 2012 году: теоремы об устойчивости аффинных отображений в банаховом пространстве, второй метод точного вычисления совместного спектрального радиуса, теоремы об асимптотике случайных произведений неотрицательных матриц, и описание примитивных семейств неотрицательных матриц.

1. Устойчивость аффинных отображений. Верно ли, что "почти аффинное" отображение банаховых пространств $F : X \to Y$ (т.е., отображение, удовлетворяющее соотношению аффинности

$$F\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) = t\,F\left(x_1\right) + (1-t)\,F\left(x_2\right)$$

с некоторой точностью $\varepsilon > 0$) может быть хорошо приближено аффинным отображением, и какова точность приближения в зависимости от ε ? Этой задачей, в различных формулировках, занимались Улам, Хайерс ("устойчивость по Уламу-Хайерсу"), Гер, Рассиас, Палеш, Гаврута, Шемрль и др. В работе [6] мы доказываем липшицеву устойчивость аффинных отображений произвольного банохового пространства X в пространство Y, сопряженное к нормированному. При этом оценка точности приближения линейна по ε и неулучшаема (точность оценки показана на примере). Этот результат, в случае $Y = \mathbb{R}$, дает решение задачи, сформулированной Ж.Палешем в 2008 г. В работе [4] мы доказываем устойчивость аффинных функционалов в равномерной метрике на выпуклых ограниченных множествах $D \subset X$. Доказано, что точность приближения также линейна по ε, а константа зависит от размерности пространства X и от геометрии множества D. В доказательстве использована обобщенная теорема об очистке для выпуклых функционалов.

2. Вычисление совместного спектрального радиуса линейных операторов. Совместный спектральный радиус (joint spectral radius, далее – JSR) семейства линейных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$, является показателем асимптотического роста максимального по норме произведения операторов из $\mathcal{A}$. Он определяется следующим образом:

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \max_{d_1,\ldots,d_k \in \{1,\ldots,m\}} \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\|^{1/k}.$$

Данный предел всегда существует и не зависит от операторной нормы в $\mathbb{R}^d$. Совместный спектральный радиус появился в 1960 г. в работе Рота и Стрэнга, и с тех пор нашел множество применений в функциональном анализе, теории приближений, динамических системах, комбинаторике, и т.д. В частности, в теории функциональных уравнений со сжатием аргумента, совместный спектральный радиус специальных матриц отвечает за гладкость решения. В теории линейных динамических систем с переключениями:

$$\dot{x}(t) \quad = \quad A(t)\,x(t), \qquad A(t) \in \mathcal{A}\,,\ t \in [0, +\infty)\,,$$

вопрос об устойчивости системы сводится к проверке неравенства $\hat{\rho}\big(\, e^{tA_1}, \ldots, e^{tA_m}\,\big) \,<\, 1$ при $t \in (0, \varepsilon)$. Известно, что задача вычисления JSR для произвольного семейства матриц с целыми коэффициентами NP-сложна, а задача проверки неравенства $\hat{\rho} < 1$ для матриц с рациональными коэффициентами алгоритмически неразрешима (Блондель, Цициклис, 1997). Тем не менее, в литературе разработано около десятка различных методов, дающих либо грубые оценки на значение JSR в больших размерностях, либо достаточно точные (погрешность до 1%), но только для маленьких размерностей матриц, как правило, для $d \le 5$. В 2012 г. вышла наша совместная работа [2] с Н.Гуглиелми (Университет Аквила, Италия), где мы представляем метод точного вычисления JSR в следующем смысле: он вычисляет $\hat{\rho}(\mathcal{A})$ как собственное значение некоторой матрицы. Несмотря на то, что метод применим не для всех семейств матриц (что невозможно, в силу результатов об алгоритмической сложности данной задачи), он, согласно данным численных экспериметнов, дал успешные результаты для всех разобранных примеров из приложений, а также для всех (100 %) случайно сгенерированных семейств матриц размерностей $d \le 20$. Для неотрицательных матриц размерность повышается до 100. В этом году мы с Н.Гуглиелми предложили в еще один метод точного вычисления JSR, основанный на новой идее построении специальной “эллипсоидальной” нормы в $\mathbb{R}^d$. Данный метод работает в больших размерностях и сходится значительно быстрее (для матриц размерности 20 программа выдает значение менее JSR, чем за 1 мин.).

В совместной работе с Ю.Нестеровым [8] нами предложен метод быстрого вычисления JSR семейств неотрицательных матриц, имеющих структуру прямого произведения (каждый столбец матрицы выбирается произвольным образом из заданного множества). Метод также позволяет эффективно максимизировать спектральный радиус таких семейств матриц.

3. Асимптотика произведений случайных неотрицательных матриц. Показатели (экспоненты) Ляпунова – показатели роста норм произведений случайных последовательностей линейных операторов, широко изучаются в литературе, начиная с 1960-х годов, с классических работ Фюрстенберга, Кестена, Оселедца, Тутубалина, и др. С точки зрения вычисления, показатель Ляпунова еще хуже, чем совместный спектральный радиус. Так, в отличие от последнего, показатель Ляпунова не является непрерывной функцией матриц. Особый интерес вызывает случай, когда все матрицы семейства $\mathcal{A}$ неотрицательны. Так, если все матрицы строго положительны, то каждый элемент случайного произведения матриц имеет одну и ту же асимптотику, задаваемую показателем Ляпунова (теорема Ишитани). Условие строгой положительности последовательно ослаблялось в работах Ваткинса, Хенниона, Кея и Хонга. В работе [9] нам удалось усилить данные результаты, установив поэлементную асимптотику произведений любых неотрицательных случайных матриц. В качестве следствия мы доказываем гипотезу Дж.Коэна для неотрицательных матриц: показатель Ляпунова задает асимптотику не только нормы, но и спектрального радиуса произведений случайных матриц.

4. Примитивные семейства неотрицательных матриц. Одно из основных понятий теории Перрона-Фробениуса – примитивная матрица, т.е. неотрицательная матрица, некоторая степень которой строго положительна. Примитивные матрицы наследуют многие свойства положительных матриц: сингулярность наибольшего собственного значения, сходимость нормированных степеней матрицы к одноранговой матрице, и т.д. Этим объясняется исключительная важность примитивных матриц в теории марковских цепей, комбинаторике, теории графов, теории функциональных уравнений со сжатием аргумента, и т.д. В ряде задач возникает необходимость обобщения понятия примитивности на семейства неотрицательных матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Они применяются при исследовании показателей Ляпунова, неоднородных цепей Маркова, также тесно связаны с рядом задач эргодической теории (например, о перемешивающих (scrambling) семействах матриц, и т.д.). Такие обобщения могут осуществляться разными путями. В литературе изучались сильно примитивные семейства, для которых все произведения $A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ положительны при достаточно больших k (Коэн, Селлерс, Мичелли, Праутш, Жоу, и др.), а также, так называемые, m-примитивные семейства (Форназини, Валкер, Олески, Шадер, Ван-Дрисче, и т.д.). В обоих случаях возникают значительные трудности при обобщении результатов теории Перрона-Фробениуса на примитивные семейства матриц. Алгоритмическая сложность распознавания таких семейств также неясна. В работе [1] (совместно с А.С.Войновым) мы представляем новое обобщение примитивности. Семейство $\mathcal{A}$ примитивно, если существует хотя бы одно положительное произведение матриц из $\mathcal{A}$. Для такого понятия примитивности мы обобщаем основные результаты теории Перрона-Фробениуса (включая теорему Романовского о связи индекса импримитивности с длинами циклов соотвествующего графа) и строим полиномиальный алгоритм распознавания примитивных семейств. Более того, данный подход удается распространить и на m-примитивные семейства матриц, тем самым, доказывая их полиномиальную распознаваемость. Это сделано в работе [10], поданной в печать в 2012 году. В этой связи упомянем, что задача о существовании у данного семейства неотрицательных матриц *нулевого* произведения (свойство, в некотором смысле, “противоположное” примитивности) является NP-сложной (Блондель, Цициклис, 2000).

Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные

1. V.Yu.Protasov, A.S.Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products*, Linear Alg. Appl., 437 (2012), no 3, 749-765.

2. N.Guglielmi, V.Yu.Protasov, *Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators*, Foundations of Comput. Math., (2012).

3. V.Yu.Protasov, *On stability of isometries in Banach spaces*, Th.M. Rassias and J. Brzdek (eds.), Functional Equations in Mathematical Analysis, Springer Optimization and Its Applications, 52 (2012), 273-285.

4. V.Yu.Protasov, *Stability of affine approximations on bounded domains*, Pardalos, Panos M. (ed.) et al., Nonlinear analysis. Stability, approximation, and inequalities. In honor of Th.M.Rassias on the occasion of his 60th birthday, Springer Optimization and Its Applications, 68 (2012), 587-606.

5. А.Р.Алимов, В.Ю.Протасов, *Отделимость выпуклых множеств экстремальными гиперплоскостями*, Фунд. и Прикл. Мат. 17 (2012), no 4, 3-12.

Принятые

6. V.Yu.Protasov, *Lipschitz stability of operators in Banach spaces*, Тр. МИАН, готовится к выходу.

Поданные

7. V.Yu.Protasov and R.M.Jungers, *Lower and upper bounds for the Largest Lyapunov exponent of matrices*, Linear Alg. Appl. (submitted)

8. Yu.Nesterov, V.Yu.Protasov, *Optimizing the spectral radius*, SIAM J. Matr. Anal. (submitted)

9. В.Ю.Протасов, *Асимптотика произведений неотрицательных случайных матриц*, Функциональный анализ и приложения (подано).

10. V.Yu.Protasov, *Classification of k-primitive sets of matrices*, SIAM J. Matr. Anal. (submitted)

Научно-популярные и учебно-методические публикации

11. В.Ю.Протасов, В.М.Тихомиров, *Пространство L_p и замечательные точки треугольника*, Квант, no 2 (2012), 2-11.

12. И.В.Аржанцев, В.И.Богачев, А.И.Гарбер, А.А.Заславский, В.Ю.Протасов, А.Б.Скопенков, *Студенческие олимпиады мехмата МГУ 2010–2011*, Математическое просвещение, серия 3 (2012), 214-227.

Участие в конференциях и школах

1. International conference on Wavelets and Applications, Санкт-Петербург, 8–15 июля 2012 *(пленарный доклад)* .
2. International Haifa Matrix Theory conference-2012, Хайфа (Израиль), 12–15 ноября 2012.

Работа в научных центрах и международных группах

University of L'Aquila (Аквила, Италия), февраль 2012 и сентябрь 2012.
Catholic University Louvain (Лоувайн-ля-Нёв, Бельгия), апрель 2012.
Sabanchi University (Стамбул, Турция), июнь 2011.
Участие в международном проекте "Research in pairs. Non-stationary subdivisions."

Работа в редколлегиях журналов

член редколлегии журнала ISRN Combinatorics
член редколлегии журнала Communications in Mathematics and Applications
член редколлегии журнала Квант

Педагогическая деятельность

`Преподавание.`

Курс *"Вариационное исчисление и оптимальное управление"* (МГУ, мех-мат).
Со-руководитель двух спецсеминаров на мех-мате МГУ.
Участие в проведении мех-матовской студенческой олимпиады,
а также олимпиады кафедры ОПУ "Экстремальные задачи"
Мини-курс *"Вариационные задачи"*
(летняя школа "Современная математика" Дубна, 2012).

`Научное руководство.`

аспиранты:

Авксентьев Евгений, аспирантура мех-мата МГУ, 2 год,
Дементьева Елена (совм. с А.Б.Дмитруком), аспирантура ЦЭМИ, 1 год.

студенты:

Войнов Андрей (мех-мат МГУ, 5 курс), Киселева Ольга (мех-мат МГУ, 4 курс);

`Работа со школьниками.`

Научное руководство дипломной работой А.Попеску (11 класс, лицей 1514);
Организация и работа в жюри геометрической олимпиады им. Шарыгина;
Работа в редколлегии журнала "Квант".
Лекции для школьников на малом мех-мате, в лицее 218, и т.д.